תרגיל 12

1. מצאו דוגמה של מרחב קומפקטי והאוסדורפי שאינו מטריזבילי

2. הראו שהמרחבים הבאים אינם קומפקטים מקומית:
   (א) $\mathbb{Q}$
   (ב) l_2
   (ג) l_∞

3. קומפקטיפיקציית חד נקודתית $(Alexandroff)$: תהי (X,τ) האוסדורפי וקומפקטי מקומית שאינו קומפקטי. נגדיר $X^* := X \cup \{\infty\}$ ואת הטופולוגיה

$$\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K \mid K \subseteq X \text{ is compact}\}$$

   (א) הוכיחו שזה אכן מרחב טופולוגי.
   (ב) הוכיחו ש־(X^*,τ^*) קומפקטי.
   (ג) הוכיחו ש־(X^*,τ^*) האוסדורפי.
   (ד) הוכיחו שפונקציית ההכלה $i : X \to X^*$ היא שיכון טופולוגי.
   (ה) הוכיחו ש־$X \subseteq X^*$ צפוף.
   (ו) הראו שהדרישה ש־(X,τ) קומפקטי מקומית הכרחית כדי ש־(X^*,τ^*) יהיה האוסדורפי.

4. יהי $X := (-\infty,1) \cup (2,5)$, הראו ש־$X^* \simeq 8$ (הצורה 8, לא המספר).

5. תארו את קומפקטיפיקציית אלכסנדרוף של מרחב דיסקרטי לא קומפקטי.

6. הראו שמרחב הוא קומפקטי מקומית והאוסדורפי אם ורק אם יש לו קומפקטיפיקציה חד נקודתית.

7. הוכיחו או הפריכו: כל פונקציה רציפה והפיכה מ־$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: f היא הומיאומורפיזם.

8. הוכיחו או הפריכו: אם X קומפקטי והאוסדורפי, $A \subseteq X$ סגורה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז קיימת $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$\widehat{f}_{|A} = f$$

וגם

$$\sup_{x\in X}|\widehat{f}(x)| = \sup_{x\in A}|f(x)|$$

9. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי לא האוסדורפי בו ישנו גבול יחיד לכל סדרה מתכנסת