

## בדידה להנדסה- פתרון תרגיל 5

30 באפריל 2019

1. הוכיחו:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$   
פתרון: באינדוקציה.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \quad n = 1$$

נניח נכונות עבור  $n$  ונראה עבור  $n + 1$ .

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

כדרוש.

2. פתרון בדף השני.

3. פתרון בדף השני.

4. תהי  $A$  קבוצה סופית. הוכח:

מס' תתי הקבוצות של  $A$  בגודל זוגי שווה למס' תתי הקבוצות בגודל אי זוגי.

פתרון: באינדוקציה, על גודל הקבוצה.

$n = 1$ :  $A = \{a\}$ ,  $P(A) = \{\phi, \{a\}\}$ , ומס' תתי הקבוצות בגודל זוגי ואי זוגי שווה (אחת מכל זוגיות).

נניח נכונות עבור  $n$  ונראה עבור  $n + 1$ .

לשם הנוחות נסמן את הקבוצה כך:  $A_n = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ .

כעת:  $P(A_{n+1}) = P(A_n) \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in P(A_n)\}$ .

כלומר, חילקנו את קבוצת החזקה של  $A_{n+1}$  לקבוצות המכילות את  $n + 1$  וכאלו שאינן מכילות אותו.

לפי הנחת האינדוקציה מס' הקבוצות בגודל זוגי ובגודל אי זוגי ב-  $P(A_n)$  שווה, ולכן גם ב-  $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in P(A_n)\}$  (ע"י הוספת  $n + 1$  הזוגיות של כל קבוצה משתנה, ומספר הזוגיות והאי-זוגיות שווה), ובסה"כ מס' תתי הקבוצות בגודל זוגי ובגודל אי זוגי ב-  $P(A_{n+1})$  שווה, כדרוש.

5. הוכח: כל מספר טבעי ( $2 \leq$ ) ניתן להציג כמכפלת מספרים ראשוניים.

פתרון: באינדוקציה שלמה.

באינדוקציה שלמה אנו מניחים שהטענה נכונה עבור כל  $k < n$  ומוכיחים עבור  $n$ .

$n = 2$ : ראשוני ולכן הטענה נכונה.

נניח שהטענה נכונה לכל  $k < n$ . אם  $n$  ראשוני הטענה נכונה,

אחרת, יש  $2 \leq a, b < n$  כך ש  $n = a \cdot b$ .

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להציג את  $a$  ו-  $b$  כמכפלת ראשוניים:

$$n = q_1^{s_1} \cdot \dots \cdot q_m^{s_m} \cdot p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_l^{r_l} \quad \text{ולכן} \quad b = q_1^{s_1} \cdot \dots \cdot q_m^{s_m}, \quad a = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_l^{r_l}$$

כלומר הצגנו את  $n$  כמכפלת ראשוניים, כדרוש.