פתרון מבחן מועד ג' קיץ תשפ"ב לינארית 88112

1. (24 נק') יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן בתת־המרחב

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ -a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ -a \\ -a-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^4$$

ובווקטור

$$v = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(א) קבעו לכל ערך של הפרמטר a מהו המימד של U (מעל שדה הממשיים).

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם $v \in U$.

(ג) עבור $a=1$, מצאו בסיס B עבור U, וחשבו את $[v]_B$.

$$U = span\{(a,1,-1,-a-1),(a^2,a,-a,-a-4),(a,a,-1,2)\}$$

$$v = (a,1,-1,-1)$$

סעיף א': קבעו לכל ערך של הפרמטר a מה המימד של U (מעל שדה הממשיים).

נשים את הוקטורים במטריצה (תכף נחליט אם בשורות ולהסתכל על מרחב השורות, או בעמודות ולהסתכל על מרחב העמודות).

אבל בסעיף הספציפי הזה שאלו אותנו רק על מימד, והרי מימד מרחב השורות ומימד מרחב העמודות זהים, ונקראים דרגת המטריצה.

עוד הערה לגבי איך לגשת לשאלות במבחן, לפני שארוץ לשים במטריצה ולדרג, אקרא את שאר השאלה. בסעיף ב' אני רואה שארצה לשים את וקטורי הכיוון של U בעמודות וגם את הוקטור v.

יאללה, נשים בעמודות את הכל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a^2 & a \\ 1 & a & a & 1 \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ -a-1 & 2 & -a-4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a^2 & a \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ -a-1 & 2 & -a-4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+aR_3]{\text{התחכמות}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ -a-1 & 2 & -a-4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-R_3]{\text{התחכמות}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ -a & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ -a & 3 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 3+a^2 & a^2-4 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{a^2+3}R_2}$$

כיוון שהשאלה בשדה הממשיים אזי $3+a^2 \neq 0$ ומותר לחלק בו (במרוכבים היה אסור לי להגיד את זה, והייתי חייב לחלק למקרים)

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a^2-4}{a^2+3} & \frac{a}{a^2+3} \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(a-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a^2-4}{a^2+3} & \frac{a}{a^2+3} \\ 0 & 0 & -\frac{(a-1)(a^2-4)}{a^2+3} & -\frac{a(a-1)}{a^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר בודקים אם המטריצה מדורגת, יש לדעת מי האיברים הפותחים, ורק לגבי איבר אחד יש סימן שאלה אם היא פותח (הראשון ששונה מאפס)

אם $a \neq 1, \pm 2$ אזי המטריצה מדורגת, יש איבר פותח בשלושת העמודות הראשונות, אין שורת סתירה

ולכן אפשר להגיד במקרים אלה:

1. שלושת העמודות המקוריות בת"ל, כלומר בהקשר לסעיף א', זה אומר שבמקרים אלה $\dim U = 3$ ושלושת הוקטורים הנתונים מהווים בסיס לU (למרות שאף אחד לא שאל).
2. לסעיף ב', כיוון שיש פתרון למערכת המשוואות המתאימה (מדורגת בלי סתירה), $v \in U$.

כעת נטפל בכל אחד משלושת המקרים הנותרים ישירות.

עבור $a = 2$ נציב במטריצה המדורגת (אליה הגענו עם פעולות חוקיות לכל a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

יש שורת סתירה, והמטריצה מדורגת ולכן

1. שתי העמודות המקוריות מהוות בסיס למרחב העמודות, כלומר $\dim U = 2$.
2. לסעיף ב', יש שורת סתירה, ולכן עבור $a = 2$ מתקיים כי $v \notin U$

עבור $a = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ושוב

1. שתי העמודות המקוריות מהוות בסיס למרחב העמודות, כלומר $\dim U = 2$.
2. לסעיף ב', יש שורת סתירה ולכן עבור $a = -2$ מתקיים כי $v \notin U$.

לבסוף נציב $a = 1$ ונפתור גם את סעיף ג' על הדרך

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & | & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת ללא שורת סתירה. שתי העמודות המקוריות מהוות בסיס למרחב העמודות ולכן $\dim U = 2$

סיכום סעיף א':

אם $a \neq 1, \pm 2$ אזי $\dim U = 3$

אחרת $\dim U = 2$

כמו כן, כיוון שיש פתרון למערכת במקרה זה $v \in U$

סיכום סעיף ב':

אם $a \neq \pm 2$ אזי $v \in U$

אחרת $v \notin U$

עתה נעבור לסעיף ג'

U כאמור הוא מרחב העמודות של מטריצת המקדמים המקורית, לכן הבסיס לU הוא שתי העמודות המקוריות הראשונות

$$U = span\{(a,1,-1,-a-1),(a,a,-1,2)\} = span\{(1,1,-1,-2),(1,1,-1,2)\}$$

כעת רוצים למצוא את $[v]_B$ שהם המקדמים של הצירוף הלינארי של v בעזרת הבסיס לעיל.

נתחכם מעט, ונמשיך לעבר פתרון מערכת המשוואות שכבר התעסקנו איתה.

כיוון שהפעם מעניינים אותנו הפתרונות (הרי המשתנים הם הסקלרים מהצירוף הלינארי) נבצע דירוג קנוני:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מה גילינו בעצם?

הרי מערכת המשוואות המקורית הייתה לגבי c_1, c_2, c_3 למשוואה

$$v = c_1(a,1,-1,-a-1) + c_2(a,a,-1,2) + c_3(a^2,a,-a,-a-4)$$

כאן גילינו שכאשר $a = 1$ המשתנה c_3 הוא חופשי, ומותר להציב בו אפס

ונקבל

$$c_1 = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}c_3 = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}c_3 = \frac{1}{4}$$

וסה"כ

$$[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וזה סיכום סעיף ג'.

2. (24 נק') תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ונניח שקיימים שני בסיסים סדורים $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ ו-$C=\{w_1,w_2,w_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ שעבורם

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ומימד ל-$N\left([T]_C^B\right)$ ול-$C\left([T]_C^B\right)$ (מרחב האפס ומרחב העמודות של $[T]_C^B$).

(ב) הביעו באמצעות איברי B ו-C בסיסים לגרעין ולתמונה של T.

(ג) נתון בסיס $D=\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ (אין צורך להוכיח ש-D בסיס). מצאו את $[T]_C^D$.

לפני הפתרון הקדמה:

מה שנתון לנו בעצם הוא

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}| & | & |\\ [Tv_1]_C & [Tv_2]_C & [Tv_3]_C\\ | & | & |\end{pmatrix}$$

וכיוון שהמטריצה נתונה לנו, אנו יודעים את $[Tv_i]_C$ לכל $1\le i\le 3$

אם C היה בסיס נתון, אז היינו יודעים לחשב את Tv_i בעצמו, אך זה לא המצב כאן.

הרי מה עושים עם קואורדינות? כופלים באיברי הבסיס!

למשל, כיוון ש

$$[Tv_1]_C=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

נכפול את הקואורדינטות באיברי הבסיס ונקבל

$$Tv_1=0\cdot w_1-w_2-w_3=-w_2-w_3$$

באופן דומה

$$[Tv_2]_C=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$Tv_2=w_1-2w_2+w_3$$

ולבסוף (ממש אדלג על שלבים)

$$Tv_3=2w_1-3w_2+3w_3$$

כעת קראתי את השאלה, ואני נוכח לדעת שאין שום קשר בין ההקדמה לסעיף א'.

פתרון סעיף א' – צריך למצוא בסיס למרחב אפס ולמרחב עמודות של מטריצה נתונה, אז נדרגה קנונית

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[-R_1]{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן הבסיס למרחב העמודות הוא זוג העמודות המקוריות $\{(0,-1,-1),(1,-2,1)\}$ כלומר

$$C([T]_C^B)=span\{(0,-1,-1),(1,-2,1)\}$$

ומימד מרחב העמודות הוא 2

כעת נציב $z = t$ ונקבל

$$x = t$$
$$y = -2t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(t, -2t, t) = t(1, -2, 1)$$

ולכן הבסיס למרחב האפס הוא $\{(1, -2, 1)\}$

$$N([T]_C^B) = span\{(1, -2, 1)\}$$

הערה: זכרו כי

$$C([T]_C^B) = [Im(T)]_C$$

$$N([T]_C^B) = [\ker(T)]_B$$

כעת פתרון סעיף ב':

מצאנו את הקואורדינטות של איברי בסיס התמונה, מה נעשה על מנת למצוא את בסיס התמונה? נכפול באיברי הבסיס!

$$Im(T) = span\{-w_2 - w_3, w_1 - 2w_2 + w_3\}$$

כלומר הבסיס לתמונה הוא

$$\{-w_2 - w_3, w_1 - 2w_2 + w_3\}$$

הסבר נוסף: ידוע כי

$$Im(T) = span\{Tv_1, Tv_2, Tv_3\}$$

ומסעיף א' גילינו מי הוקטורים הבת"ל כאן, כיוון שהקואורדינטות איזומורפיזות לוקטורים. ולכן הבסיס לתמונה יצא

$$\{Tv_1, Tv_2\}$$

כעת לגרעין אותו כנ"ל

$$\ker T = span\{v_1 - 2v_2 + v_3\}$$

כלומר הבסיס לגרעין הוא

$$\{v_1 - 2v_2 + v_3\}$$

ג) נתון בסיס $D = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ (אין צורך להוכיח ש-D בסיס).
מצאו את $[T]_C^D$.

הקדמה – אציג שתי גישות שונות לפתרון סעיף זה, ותתכנה אף יותר (תלוי גם בנתונים)

1. למצוא את מטריצה המעבר בין בסיסים $[I]_B^D$ ואז $[T]_C^D = [T]_C^B \cdot [I]_B^D$
2. למצוא ישירות את $[Td_i]_C$ ואז נשים וקטורים אלה בעמודות ונקבל את $[T]_C^D$

אפתור כאן את השאלה בשתי הגישות:

לפי הגישה הראשונה:

צריך להפעיל את העתקת הזהות I על איברי הבסיס D, כלומר לא לעשות כלום.

כעת למצוא את הקואורדינטות לפי הבסיס B

$$[v_1+v_2]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

הרי אלה הסקלרים שאכפול באיברי הבסיס B על מנת לקבל את הוקטור v_1+v_2

$$[v_2+v_3]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$[v_3]_B=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[I]_B^D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_C^D=[T]_C^B\cdot[I]_B^D=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-2&-3\\-1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\-3&-5&-3\\0&4&3\end{pmatrix}$$

כעת נלך לפי הגישה השנייה

$$[Td_1]_C=[T(v_1+v_2)]_C=[Tv_1+Tv_2]_C=[Tv_1]_C+[Tv_2]_C=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$$

באופן דומה

$$[Td_2]_C=[T(v_2+v_3)]_C=[Tv_2]_C+[Tv_3]_C=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$$

$$[Td_3]_C=[Tv_3]_C=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$$

מצאתי תמונה של איך ליה מרגישה (החיים בזבל):

3. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו U, W תת־מרחבים של V.
<u>הוכיחו או הפריכו</u> כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם $\dim U + \dim W = \dim V + 1$, אז $U + W = V$.

(ב) אם $U \cap W = \{0_V\}$, אז קיים תת־מרחב W_1 של V כך שמתקיים $W \subseteq W_1$ וגם $U \oplus W_1 = V$.

סעיף א':

ראשית זה מזכיר את משפט המימדים ונרשום אותו

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

כעת נעזר בנתונים

$$\dim(U + W) = \dim V + 1 - \dim(U \cap W)$$

כיוון ש $U + W \subseteq V$ אזי $U + W = V$ אם ורק אם $\dim(U + W) = \dim(V)$ (במבחן היה צריך להוכיח מדוע זה אם ורק אם, או לא לכלול את המשפט הזה במידה ואינו נחוץ). (ההוכחה היא פשוטה בעזרת הכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים.)

לכן צריך להוכיח

$$\dim V = \dim V + 1 - \dim(U \cap W)$$

כלומר ש

$$\dim(U \cap W) = 1$$

זה נותן רעיון להפרכה, שנתחיל כעת:

<u>הפרכה</u>:

נבחר מרחב ושני תתי מרחבים שהחיתוך ביניהם ממימד 2 ושסכום המימדים שלהם הוא מימד המרחב כולו ועוד 1.

והרי איזה פלא! נבחר מישור $U = W =$ בתוך העולם התלת מימדי.

נבחר במפורש (כך צריך)

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$U = W = span\{e_1, e_2\}$$

$$\dim U = \dim W = 2$$

$$\dim U + \dim W = 4 = \dim V + 1$$

$$U + W = U \neq V$$

(ב) אם $U \cap W = \{0_V\}$, אז קיים תת־מרחב W_1 של V כך שמתקיים $W \subseteq W_1$ וגם $U \oplus W_1 = V$.

יהי בסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ לU ויהי בסיס $\{w_1, \dots, w_m\}$ לW

ראשית אטען כי הסדרה $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$ בת"ל (ולאחר מכן אוכיח טענה זו)

כעת בהנחה שהיא אכן בת"ל אפשר להשלימה לבסיס לV

$$\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r\}$$

ועכשיו נבחר

$$W_1 = span\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r\}$$

נותר להוכיח כי בחירה זו עונה על דרישות השאלה.

כעת נסגור את הפערים בהוכחה. נתחיל מהסדרה שרוצים להוכיח שהיא בת"ל

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1w_1 + \dots + b_mw_m = 0_V$$

צ"ל שכל הסקלרים הם אפס.

נעביר אגף

$$a_1u_1 + \dots + a_ku_k = -b_1w_1 - \dots - b_mw_m$$

צד שמאל שייך לU צד ימין שייך לW (מתוך סגירות) וכיוון שהם שווים שניהם שייכים לחיתוך.

וכיוון שהחיתוך הוא רק וקטור האפס נובע כי שני הצירופים הלינאריים הללו מתאפסים

$$a_1u_1 + \dots + a_ku_k = 0_V$$

$$-b_1w_1 - \dots - b_mw_m = 0_V$$

כיוון שאלה צירופים לינאריים מתאפסים של בסיסים, כל הסקלרים הם אפס.

כעת צ"ל כי $W \subseteq W_1$ וזה ברור כי הבסיס של W מוכל בבסיס של W_1

(הרי אם $A \subseteq B$ הרי $span(A) \subseteq span(B)$)

על מנת להוכיח כי

$$U \oplus W_1 = V$$

צריך להוכיח כי

$$U + W_1 = V$$

וכן

$$U \cap W_1 = \{0_V\}$$

למעשה, כאן נוכיח אחת מהטענות, והשני ינבע ממשפט המימדים.

לפי המשפט כי

$$span(A \cup B) = span(A) + span(B)$$

נובע כי

$$U + W_1 = span\,\underbrace{(\{u_1, \dots, u_k\} \cup \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r\})}_{V \text{ הבסיס של}} = V$$

לבסוף

$$\underbrace{\dim(V)}_{k+m+r} = \dim(U + W_1) = \underbrace{\dim U}_{k} + \underbrace{\dim W_1}_{m+r} - \dim U \cap W_1$$

ולכן

$$\dim U \cap W_1 = 0$$

משל.

4. (20 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, ותהיינה $T, S\colon V \to W$ העתקות לינאריות.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם $\ker T \cap \ker S = \{0_V\}$, אז $\mathrm{Im}T \cap \mathrm{Im}S = \{0_W\}$.

(ב) הוכיחו כי $\mathrm{Im}T \subseteq \mathrm{Im}S$ אם ורק אם קיימת העתקה לינארית $R\colon V \to V$ שעבורה $T = SR$.

סעיף א': הפרכה

נביט ב$V = W = \mathbb{R}^2$

אציג את ההעתקות בעזרת משפט ההגדרה, כי זה הכי מהיר, קל, ומתאים לשאלה

ניקח בסיס כלשהו למרחב

$$B = \{v_1, v_2\}$$

$$Tv_1 = 0_V$$

$$Tv_2 = v_1$$

$$Sv_1 = v_1$$

$$Sv_2 = 0_V$$

נוכיח שזו הפרכה טובה, כלומר $\ker T \cap \ker S = \{0_V\}$ אבל $Im(T) \cap Im(S) \neq \{0_W\}$

$$Im(S) = span\{Sv_1, Sv_2\} = span\{v_1\}$$

באופן דומה גם

$$Im(T) = span\{v_1\}$$

ולכן

$$Im(T) \cap Im(S) = span\{v_1\} \neq \{0_W\}$$

ממשפט הדרגה

$$\dim \ker T + \dim Im(T) = \dim V = 2$$

ולכן מימד הגרעינים הוא 1

כיוון ש $v_1 \in \ker T$ נובע מהכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים כי

$$\ker T = span\{v_1\}$$

ובאופן דומה

$$\ker S = span\{v_2\}$$

ולכן החיתוך בין הגרעינים הוא ממימד אפס, קל להוכיח זאת מתלות לינארית.

הערה בדידתית: ההפרכה כאן, כמו תמיד, היא הוכחת השלילה. הטיעון המקורי הוא

$$\forall V, W, T, S: p \rightarrow q$$

ההפרכה היא הוכחה כי

$$\exists V, W, T, S: p \wedge \neg q$$

הערה: אפשר היה גם להפריך ע"י $T = S = I$ כי הגרעין הוא רק אפס, והתמונות שוות לכל המרחב.

(ב) הוכיחו כי $\mathrm{Im}T \subseteq \mathrm{Im}S$ אם ורק אם קיימת העתקה לינארית $R: V \to V$ שעבורה $T = SR$.

בכיוון הקל נניח כי $T = SR$

ונוכיח כי $Im\ T \subseteq Im\ S$

יהי $w \in Im\ T$ צ"ל כי $w \in Im\ S$.

נתון כי קיים $v \in V$ כך ש $w = Tv$

כלומר

$$w = SRv = S(Rv) \in Im\ S$$

כעת נעבור לכיוון המאתגר בו אנחנו צריכים לבנות את ההעתקה R, את זה נעשה לפי בסיס, ויהיה צריך לבנות את הבסיס בצורה חכמה (בסוף גילינו שבסיס אקראי עבד בשאלה הזו).

נתון כי $ImT \subseteq ImS$ וצריך לבנות העתקה R כך ש $T = SR$

$$T, SR: V \rightarrow W$$

מטרה:

אנחנו נבנה בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ לV עליו נגדיר את ההעתקה $R: V \to V$ אך נרצה לוודא

$$\forall i: Tv_i = S(Rv_i)$$

כי אז $T = SR$ לפי משפט ההגדרה (החלק של היחידות)

יהי בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ לV.

לכל i, מתקיים כי $Tv_i \in Im\ T$

ולכן $Tv_i \in Im\ S$ ולכן קיים וקטור x_i עבורו $Sx_i = Tv_i$

לכן נבחר כי

$$Rv_i = x_i$$

ולכן

$$Tv_i = Sx_i = S(Rv_i)$$

ואכן בנינו העתקה R לפי משפט ההגדרה, כך ש

$$T = SR$$

5. (24 נק') תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נסמן $k = \operatorname{rank}(A)$.

(א) הוכיחו שאם $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שעבורה $\operatorname{rank}(B) < n-k$, אז $A+B$ אינה הפיכה.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $A \neq 0$ ואינה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מדרגה $n-k$ שעבורה $A+B$ אינה הפיכה.

(ג) הוכיחו שקיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מדרגה $n-k$ שעבורה $A+B$ הפיכה.

סעיף א':

נתון כי $rank(B) < n-k$ צ"ל כי $A+B$ אינה הפיכה.

נזכור מטריצה ריבועית היא הפיכה אם ורק אם דרגתה מלאה, כלומר שווה לכמות העמודות ששווה לכמות השורות.

כלומר צ"ל כי

$$rank(A+B) < n = k + n - k$$

למעשה נובע שמספיק להוכיח

$$rank(A+B) \le rank(A) + rank(B) \overset{\text{כי אז}}{<} k + n - k = n$$

נוכיח למעשה טענה חזקה בהרבה

$$C(A+B) \subseteq C(A) + C(B)$$

מדוע זה יספיק? שהרי

$$\dim\big(C(A) + C(B)\big) = \dim C(A) + \dim C(B) - \dim\big(C(A) \cap C(B)\big) \le \dim C(A) + \dim C(B)$$

וסה"כ נקבל כי

$$rank(A+B) = \dim C(A+B) \leq \dim\big(C(A)+C(B)\big) \leq \dim C(A) + \dim C(B) = rank(A) + rank(B)$$

כפי שרצינו.

צ"ל

$$C(A+B) \subseteq C(A) + C(B)$$

כעת נשים לב כי

$$C(A+B) = span\{C_1(A+B), \dots, C_n(A+B)\} = span\{C_1(A)+C_1(B), \dots, C_n(A)+C_n(B)\}$$

כמובן ש

$$span\{C_1(A)+C_1(B), \dots, C_n(A)+C_n(B)\} \subseteq span(\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} \cup \{C_1(B), \dots, C_n(B)\}) =$$

$$= span\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} + span\{C_1(B), \dots, C_n(B)\} = C(A) + C(B)$$

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $A \neq 0$ ואינה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מדרגה $n-k$ שעבורה $A+B$ אינה הפיכה.

הערה על המבנה הלוגי של הטענה

$$\forall A: (A \neq 0 \wedge rank(A) \neq n) \rightarrow \exists B: rank(B) = n-k \wedge rank(A+B) \neq n$$

כיצד תראה הפרכה?

נתן דוגמא לA כך ש $A \neq 0$ וגם A אינה הפיכה וגם לכל B או ש$rank(B) \neq n-k$ או ש $rank(A+B) = n$

הדגש המרכזי הוא שהשאלה היא בערך מהצורה לכל A קיימת B. הפרכה היא לבחור A שלא קיימת עבורה B, והוכחה היא לבחור B באופן כללי עבור A.

הערה מיותרת אבל שתעזור לדעתי לפתוח את הראש לתרגיל:

אם $A=0$ אזי $k=0$ ואז אם $rank(B) = n-k = n$ נובע כי B הפיכה. ולכן $A+B=B$ והיא הפיכה וזו הייתה הפרכה.

כעת נפתור את התרגיל (נדמה לי שזו הוכחה).

ננסה לחשוב מה היה קורה אילו $rank(A) = 1$ אז צריך $rank(B) = n-1$ ניקח את העמודה שמהווה בסיס ל$C(A)$ נוסיף לה $n-2$ עמודות בת"ל מהן נבנה את B ונוסיף לB עמודת אפסים.

קל לראות

$$C(A) \subseteq C(B)$$

ולכן

$$C(A+B) \subseteq C(A) + C(B) = C(B)$$

וכיוון שB אינה הפיכה, $\dim C(B) < n$ ולכן גם $\dim C(A+B) < n$ ולכן $A+B$ אינה הפיכה.

כעת נכליל את הרעיון.

נחלק למקרים, אם $k \leq \frac{n}{2}$ אזי $rank(B) = n-k \geq \frac{n}{2}$

ניקח בסיס ל$C(A)$ נשלימו לבסיס במימד $n-k$ אלה תהיינה עמודות B וk העמודות הנותרות תהיינה עמודות אפסים.

כיוון ש $k \geq 1$ נובע כי $n-k < n$ ושאר ההוכחה עובדת. (במבחן הייתי מפרט מעט יותר).

אחרת $k > \frac{n}{2}$ וצריך $rank(B) = n - k < \frac{n}{2}$ ופשוט נבחר חלק מבסיס $C(A)$ להיות עמודות B ונקבל תוצאה דומה (שוב במבחן הייתי מפרט מעט יותר).

5. (24 נק') תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נסמן $k = \mathrm{rank}(A)$.

(א) הוכיחו שאם $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שעבורה $\mathrm{rank}(B) < n-k$, אז $A+B$ אינה הפיכה.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $A \neq 0$ ואינה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מדרגה $n-k$ שעבורה $A+B$ אינה הפיכה.

(ג) הוכיחו שקיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מדרגה $n-k$ שעבורה $A+B$ הפיכה.

סעיף ג' ואחרון למבחן זה!

בשלב זה צריך למצוא מקום יבש מדמעות על טופס הבחינה על מנת לכתוב את התשובה.

הוכחה: כיוון ש $rank(A) = k$ נובע כי $\dim C(A) = k$ נבחר k העמודות מA המהוות בסיס למרחב העמודות של A ונסמנן

$$\{v_1, \dots, v_k\}$$

נשלים לבסיס ל$\mathbb{F}^n$

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

נבחר מטריצה B כך שבעמודות המתאימות ל$v_1, \dots, v_k$ של A במטריצה B תהיינה עמודות אפסים.

בשאר עמודות המטריצה B נשים את $v_{k+1}, \dots, v_n$

מכאן נובע:

$$C(B) = span\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

ולכן

$$rank(B) = \dim C(B) = n - k$$

נותר להוכיח כי $A + B$ הפיכה

מספיק להוכיח כי $v_1, \dots, v_n \in C(A + B)$ שהרי הם פורשים את המרחב כולו, ואז $\dim C(A + B) = n$ וסיימנו.

ברור כי

$$v_1, \dots, v_k \in C(A + B)$$

הרי לפי הבנייה אלה ממש עמודות של $A + B$.

כעת כל עמודה אחרת ב$A + B$ היא מהצורה

$$v_{k+j} + C_i(A) = v_{k+j} + a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \in C(A + B)$$

מתוך סגירות, גם

$$v_{k+j} = \left(v_{k+j} + a_1 v_1 + \dots + a_k v_k\right) - (a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) \in C(A + B)$$

משל.

דוגמא להמחשת ההוכחה:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_1 + v_2 & v_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & v_3 & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_1 + v_2 + v_3 & v_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$