83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 8 פתרונות

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

יחסי שקילות

תרגיל 1 עבור היחסים הנתונים בדוק אם הם יח"ש, במידה וכן מצא את מחלקות השקילות:

$$R = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N} , \text{זוגי } a+b\}$$

זהו יח"ש

רפלקסיבי כי לכל $a \in \mathbb{N}$: $a + a = 2a$ הוא מס' זוגי ולכן $(a,a) \in R$

סימטרי כי אם $(a,b) \in R$ אז $a + b = b + a$ זוגי ולכן $(b,a) \in R$

טרנזיטיבי כי אם $(a,b),(b,c) \in R$ אז $a+b, b+c$ הם זוגיים ולכן סכומם $a + c + 2b$ זוגי. $2b$ הוא כמובן זוגי ולכן ההפרש זוגי:

$(a + c + 2b) - (2b) = a + c$ ולכן $(a,c) \in R$

מחלקות שקילות:

$$[1] = \{odd\ numbers\}, \qquad [2] = \{even\ numbers\}$$

$$R = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N} , \text{זוגי } a \cdot b\}$$

לא יח"ש. למשל לא רפלקסיבי כי 7^2 לא זוגי.

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$$

כבר ראינו שהוא לא סימטרי...

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = 3^k a, \quad \text{לאיזשהו } k \in \mathbb{Z}\}$$

יח"ש!

רפלקסיבי: לכל $a \in \mathbb{N}$: $a = 3^0 \cdot a$ ולכן $(a,a) \in R$

סימטרי: נניח $(a,b) \in R$ כלומר ש $b = 3^k a$ אז $a = 3^{-k} b$ כלומר $(b,a) \in R$

טרנזיטיבי: נניח $(a,b),(b,c)\in R$ כלומר $b=3^k a$, $c=3^m b$ נציב את הראשון בשני ונקבל $c=3^{k+m}a$ כלומר $(a,c)\in R$

מחלקות שקילות: $[p]=\{p3^k \mid k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ כאשר p לא מתחלק ב3.

תרגיל 2

א. הוכח שהיחס הבא המוגדר על $\mathbb{R}$ הוא יח"ש :

$(x,y)\in R$ אם $x-y\in\mathbb{Z}$, מהי מחלקת השקילות של 1? של 0.3?

רפלקסיבי: לכל $x\in\mathbb{R}$: $x-x=0\in\mathbb{Z}$ ולכן $(x,x)\in R$

סימטרי: נניח $(x,y)\in R$ כלומר $(x-y)\in\mathbb{Z}\Longleftarrow y-x=-(x-y)\in\mathbb{Z}$

טרנזיטיבי: נניח $(x,y),(y,z)\in R$ כלומר $(x-y),(y-z)\in\mathbb{Z}$ אזי גם הסכום שלהם הוא מספר שלם: $x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z}$

מחלקות שקילות: $[1]=\mathbb{Z}$,$[0.3]=\{n+0.3 \mid n\in\mathbb{Z}\}$

ב. עבור היחס בסעיף א' הוכח שאם xRx' , yRy' אז $(x+y)R(x'+y')$

לפי הנתונים $(x-x'),(y-y')\in\mathbb{Z}$ ולכן גם הסכום שלהם שלם:

$$(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in\mathbb{Z}$$

ג. עבור היחס בסעיף א' מצא דוגמא לאיברים כך ש $(x,x'),(y,y')\in R$ אבל $(xx',yy')\notin R$

למשל : $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in R$, $(1,3)$ אבל $(\frac{1}{3},1)\notin R$

תרגיל 3

נתאר יחס על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (כלומר ש- $R\subseteq(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$)

$(a,b)R(c,d)$ אם $ad=bc$

הוכיחו שהוא יח"ש ותארו את מחלקת השקילות של $(1,2)$.

רפלקסיבי: לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $ab=ba$ ולכן $(a,b)R(a,b)$

סימטרי: נניח $(a,b)R(c,d)$: $ad=bc$ ולכן $(c,d)R(a,b)$

טרנזיטיבי: נניח $(a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f)$ אז $ad=bc, cf=de$ אזי $bce=\boldsymbol{ade}=\boldsymbol{afc}$ נצמצם את c ונקבל $af=be \Longleftarrow (a,b)R(e,f)$

מחלקת השקילות: $[(1,2)]=\{(a,2a)|a\in\mathbb{N}\}$

תרגיל 4 נתונה קבוצה A. הוכח: אם R,S הם יח"ש על A, אז גם $R\cap S$ יח"ש על A.

רפלקסיבי: לכל $a\in A$: $(a,a)\in R,S$ (כי הם יח"ש) ולכן $(a,a)\in R\cap S$

סימטרי: אם $(a,b)\in R\cap S$ אז $(a,b)\in R \leftarrow (b,a)\in R$

וגם $(a,b)\in S \leftarrow (b,a)\in S$ ולכן $(b,a)\in R\cap S$

טרנזיטיבי: נניח $(a,b),(b,c)\in R\cap S$ אזי

$(a,b),(b,c)\in R \leftarrow (a,c)\in R$ כי R יח"ש

וגם $(a,b),(b,c)\in S \leftarrow (a,c)\in S$ כי S יח"ש

ולכן גם $(a,c)\in R\cap S$

יחס סדר

תרגיל 5

היחס הלקסיקוגרפי על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מסומן על ידי $\le_L$ מוגדר בצורה הבאה:

עבור $(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{d})\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ נגדיר $(a,b)\le_L(c,d)$ אם $(a<c)$ או $(a=c\wedge b\le d)$.

כלומר היחס מוגדר כך:

$$R=\{\big((a,b),(c,d)\big)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\big|(a<c)\vee(a=c\wedge b\le d)\}$$

הוכח ש $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_L)$ קבוצה סדורה ליניארית.

רפלקסיבי: לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים $b\le b$ וגם $a=c$ ולכן $(a,b)\le_L(a,b)$

אנטי סימטרי: נניח $(a,b)\le_L(c,d)$ וגם $(c,d)\le_L(a,b)$

מכך ש-$(a,b)\le_L(c,d)$ נובעות 2 אפשרויות:

אפשרות אחת: $c < a$ אזי לא יתכן $c < a$ ולכן $(c,d) \leq_L (a,b)$ גורר ש- $a = c$ סתירה! (לכך ש$a < c$). ולכן נשלול אפשרות זאת.

אפשרות שניה: $d \leq b$ וגם $a = c$ ואז $(c,d) \leq_L (a,b)$ גורר ש- $b \leq d$ מה שנותן לנו $b = d \Leftarrow (a,b) = (c,d)$.

<u>טרנזיטיבי:</u> נניח $(a,b) \leq_L (c,d)$ ו- $(c,d) \leq_L (e,f)$

<u>אם $a < c$</u> אז כיוון שבכל מקרה $c \leq e$ (או קטן או שווה) נקבל $a < e$ ולכן $(a,b) \leq_L (e,f)$.

<u>אם $c < e$</u> אז כיוון שבכל מקרה $a \leq c$ (או קטן או שווה) נקבל $a < e$ ולכן $(a,b) \leq_L (e,f)$.

<u>אם $a = c = e$</u> אז בהכרח $b \leq d$ וגם $d \leq f$ ולכן $b \leq f$ וקיבלנו $(a,b) \leq_L (e,f)$

<u>סדר ליניארי</u> כי לכל $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מתקיים או ש $a < c$ או ש $a > c$ או ש$a = c$. במקרה הראשון $(a,b) \leq_L (c,d)$ במקרה השני $(c,d) \leq_L (a,b)$ ובמקרה שלישי או ש $b \leq d$ ואז $(a,b) \leq_L (c,d)$ או ש $d \leq b$ ואז $(c,d) \leq_L (a,b)$. בכל מקרה הם ברי השוואה.

<u>תרגיל 6</u>

היחס סדר הקרטזי על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מסומן ע"י $\leq_{Cart}$ מוגדר בצורה הבאה:

$(a,b) \leq_{Cart} (c,d)$ אם $a \leq c$ וגם $b \leq d$

הוכח שהוא יחס סדר חלקי והראה שהוא איננו יחס סדר מלא.

רפלקסיבי: לכל $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מתקיים $b \leq b$ וגם $a \leq a$ ולכן $(a,b) \leq_{Cart} (a,b)$.

אנטי סימטרי: נניח $(a,b) \leq_{Cart} (c,d)$ וגם $(c,d) \leq_{Cart} (a,b)$ כלומר $a \leq c, b \leq d, c \leq a, d \leq b$ ונקבל ש- $a = c, b = d$ משמע $(a,b) = (c,d)$.

טרנזיטיבי: נניח $(a,b) \leq_{Cart} (c,d)$ ו- $(c,d) \leq_{Cart} (e,f)$ כלומר

$a \leq c, b \leq d, c \leq e, d \leq f$ שזה אומר $a \leq e, b \leq f$ כלומר $(a,b) \leq_{Cart} (e,f)$.

ולכן זהו יחס סדר חלקי. זהו לא יחס מלא כי למשל $(2,4),(3,3)$ הם לא ברי השוואה.

תרגיל 7 $A=\{1,2,3\}$ נתבון בקס"ח $(P(A)\backslash\emptyset\,,\subseteq)$. מהם האיברים המינימאליים? מהם האיברים המקסימאליים?

האיברים המינימאליים הם $\{1\},\{2\},\{3\}$ שכן קל לראות שאין עוד תת קבוצה (פרט לריקה שלא שייכת לקבוצה שלנו) שמוכלת בהם. בכל תת קבוצה אחרת יהיו לפחות 2 אברים ואז יש תת קבוצה של איבר אחד המוכלת בה.

האיבר המקסימאלי הוא A. שכן אין עוד תת קבוצה המכילה אותו.

תרגיל 8 נגדיר יחס על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שיסומן ע"י $\preccurlyeq$ המוגדר באופן הבא:

$(a,b)\preccurlyeq(c,d)$ אם $b\geq d$ וגם $a\leq c$.

האם הוא יחס סדר חלקי? מלא? האם יש איבר מינימאלי/מקסימאלי?

רפלקסיבי: לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $b\geq b$ וגם $a\leq a$ ולכן $(a,b)\preccurlyeq(a,b)$

אנטי סימטרי: נניח $(a,b)\preccurlyeq(c,d)$ וגם $(c,d)\preccurlyeq(a,b)$ אזי

$a\leq c,b\geq d,c\leq a,d\geq b$ כלומר $a=c,b=d$ משמע $(a,b)=(c,d)$.

טרנזיטיבי: נניח $(a,b)\preccurlyeq(c,d)$ וגם $(c,d)\preccurlyeq(e,f)$ אזי

$a\leq c,b\geq d,c\leq e,d\geq f$ ולכן $a\leq e,b\geq f$ כלומר $(a,b)\preccurlyeq(e,f)$

כמובן שהוא לא מלא כי למשל $(2,4),(3,3)$ הם לא ברי השוואה.

אין איבר מקסימלי כי לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $(a,b)\preccurlyeq(a+1,b)$

אין איבר מינימאלי כי לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $(a,b+1)\preccurlyeq(a,b)$