88-165 מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

דף נוסחאות, סמסטר ב' תשפ"ב

בחירת k מתוך n.

	עם החזרה	ללא החזרה
עם חשיבות לסדר	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

הבינום של ניוטון. לכל שני מספרים a ו-b מתקיים $(a+b)^n=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

עיקרון ההכלה וההפרדה. לכל n קבוצות $A_1,\dots,A_n$ מתקיים

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}P\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right).$$

חסם איחוד. לכל סדרת קבוצות A_i מתקיים $P\left(\bigcup_i A_i\right)\le\sum_i P\left(A_i\right)$.

חוק בייס. לכל שני מאורעות A ו-B כך ש-$P\left(A\right),P\left(B\right)>0$ מתקיים $P\left(A\mid B\right)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$.

נוסחת ההסתברות השלמה. אם Ω מפורק לאיחוד זר $\bigcup_i B_i$, אז $P\left(A\right)=\sum_i P\left(A\mid B_i\right)P\left(B_i\right)$.

תוחלת. אם X בדיד, $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_a a\cdot P\left(X=a\right)$; אם X רציף בהחלט, $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

שונות. $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}\left[X\right]^2$.

שונות משותפת. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]=\mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

מקדם מתאם. $\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.

נוסחת התוחלת השלמה. אם Ω מפורק לאיחוד זר $\bigcup_i B_i$, אז $\mathbb{E}[X]=\sum_i\mathbb{E}[X\mid B_i]\cdot P(B_i)$.

חוק התוחלת החוזרת. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mid Y]]=\mathbb{E}[X]$.

חוק פירוק השונות. $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X\mid Y])$.

אי־שוויון מרקוב. אם X משתנה מקרי אי־שלילי בעל תוחלת ו-$a>0$, $P(X\ge a)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

אי־שוויון צ'בישב. אם X משתנה מקרי בעל שונות ו-$a>0$, $P(|X-\mathbb{E}[X]|\ge a)\le\frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$.

פונקציה יוצרת מומנטים. למשתנה מקרי X, **הפונקציה יוצרת המומנטים** היא $M_X(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]$ (לכל t שבו התוחלת קיימת).

אי־שוויון צ'רנוף. לכל $t>0$ שעבורו $M_X(t)$ מוגדרת, $P\left(X\ge a\right)\le M_X(t)e^{-ta}$.

אי־שוויון הופדינג. יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים עם $\mathbb{E}\left[X_i\right]=0$ ו-$|X_i|\le 1$. אז

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i\ge a\right)\le\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$

חוק המספרים הגדולים. אם $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות σ^2, אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0 .$$

משפט הגבול המרכזי. אם $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות σ^2, אז

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{בהתפלגות}} \mathrm{N}(0,1)$$

הפרדת השערות. **מבחן** הוא מאורע $A \subseteq \Omega$ כך שאם $\omega \in A$, מקבלים את H_0, ואחרת דוחים את H_0.

טעויות. **רמת המובהקות** α של מבחן היא ההסתברות לדחות את H_0 אם H_0 נכונה. מגדירים את β של מבחן להיות ההסתברות לקבל את H_0 אם H_0 לא נכונה, ואת **העוצמה** של מבחן להיות ההסתברות המשלימה.

אומד חסר הטייה. נניח ש-$X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$. אומרים שאומד $T = t(X_1, \dots, X_n)$ הוא **אומד חסר הטייה** של θ, אם לכל θ מתקיים $\mathbb{E}\left[T \mid X_1, \dots, X_n \sim F_\theta\right] = \theta$.

התפלגויות מוכרות

התפלגויות בדידות מוכרות. לאורך הטבלה, $q = 1 - p$.

ההתפלגות	כתיבה	תומך	פונקציית התפלגות $P(X=k)$	תוחלת	שונות	פונקציה יוצרת מומנטים
אחידה	$X \sim \mathrm{U}[a,b]$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{e^{(b+1)t}-e^{ta}}{e^t-1}$
ברנולי	$X \sim \mathrm{Ber}(p)$	$\{0,1\}$	$p^k q^{1-k}$	p	pq	$pe^t + q$
בינומית	$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(pe^t+q)^n$
גיאומטרית	$X \sim \mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,\dots\}$	$p \cdot q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\forall t < -\ln q : \frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסונית	$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$	$\{0,1,2,\dots\}$	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
היפרגיאומטרית	$X \sim \mathrm{HG}(N,D,n)$	$\max\{0,n+D-N\} \leq k$, $k \leq \min\{n,D\}$	$\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nD}{N}$	$\frac{\frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)(N-n)}{N-1}$	$-$
בינומית שלילית	$X \sim \mathrm{NB}(r,p)$	$\{r, r+1, \dots\}$	$\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\forall t < -\ln q : \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

קירוב פואסוני לבינומי. אם λ קבוע, ההתפלגות הפואסונית $\mathrm{Poi}(\lambda)$ משמשת קירוב טוב להתפלגות הבינומית $\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$, כלומר לכל k מתקיים $P\left(\mathrm{Bin}(n,\frac{\lambda}{n}) = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\mathrm{Poi}(\lambda) = k\right)$.

התפלגויות רציפות מוכרות.

ההתפלגות	כתיבה	תומך	פונקציית צפיפות $f_X(x)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(x) = P(X \leq x)$	תוחלת	שונות	פונקציה יוצרת מומנטים
אחידה	$X \sim \mathrm{U}[a,b]$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכית	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\forall t < \lambda : \frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית	$X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
נורמלית סטנדרטית	$X \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x)$	0	1	$e^{\frac{1}{2}t^2}$

נוסחאות נוספות

טורי טיילור מוכרים. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$; $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

קירוב סטירלינג. $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

סכומים. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.