תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
הערות הרצאה 12

שלום!

0.1 תת־חבורת הנגזרת

הגדרה 0.1. תהי G חבורה. הקומוטטור של זוג איברים $a,b\in G$ הוא

$$[a,b]\coloneqq aba^{-1}b^{-1}$$

הערה 0.2. יש כאלה שמגדירים $a^{-1}b^{-1}ab$.
האיברים a,b מתחלפים אם ורק אם $[a,b]=e$. באופן יותר כללי $ab=[a,b]\,ba$.

הגדרה 0.3. תת־חבורת הנגזרת (או תת־חבורת הקומוטטורים) היא

$$G'\coloneqq[G,G]=\langle\{[a,b]\mid a,b\in G\}\rangle$$

כלומר תת־החבורה שנוצרת על ידי קבוצת הקומוטטורים.

הערה 0.4. תת־החבורה G' מודדת עד כמה G אבלית. החבורה G אבלית אם ורק אם $G'=\{e\}$.
קבוצת הקומוטטורים סגורה להופכי

$$[a,b]^{-1}=(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}=[b,a]$$

טענה 0.5. מתקיים $G'\lhd G$.

הוכחה. אפשר לבדוק

$$g\,[a,b]\,g^{-1}=\left[gag^{-1},gbg^{-1}\right]\in G'$$

לכל $a,b,g\in G$. באינדוקציה לכל מכפלה של קומוטטורים נקבל

$$\begin{aligned}g\,[a_1,b_1]\dots[a_k,b_k]\,g^{-1}&=g\,[a_1,b_1]\,g^{-1}g\dots gg^{-1}\,[a_k,b_k]\,g^{-1}\\&=\left[ga_1g^{-1},gb_1g^{-1}\right]\dots\left[ga_kg^{-1},gb_kg^{-1}\right]\in G'\end{aligned}$$

ולכן G' סגורה להצמדה. $\square$

הערה 0.6. תת־חבורת הנגזרת היא לא סתם תת־חבורה נורמלית. לכל הומומורפיזם $f\colon G \to H$ מתקיים

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)] = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1}$$

ולכן G' היא תת־חבורה אופיינית במלואה. כלומר לכל הומומורפיזם $\varphi\colon G \to G$ מתקיים $\varphi(G') \subseteq G'$. בפרט זה נכון לכל $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$, ולכן G' נורמלית.

הגדרה 0.7. חבורה G נקראת מושלמת אם $G = G'$.

דוגמה 0.8. אם G חבורה פשוטה לא אבלית, אז G מושלמת.

הוכחה. מתקיים $G \lhd G'$ לפי ההערה הקודמת. אז $G' = \{e\}$ או $G' = G$ כי G פשוטה. מפני ש-G לא אבלית, אז $G' = G$.
לפי השערת אור (שהוכחה) כל איבר בחבורה פשוטה לא אבלית סופית הוא קומוטטור.
$\square$

דוגמה 0.9. כל מכפלה ישרה של חבורות מושלמות היא מושלמת, למשל $A_7 \times PSL_3(\mathbb{F}_4)$. מתקיים $A_n' = A_n$ לכל $n \geq 5$.

טענה 0.10. המנה $\overline{G} := G/G'$ נקראת האבליניזציה של G, ומתקיים:

1. לכל חבורה G המנה $\overline{G}$ היא אבלית.
2. לכל $N \lhd G$ מתקיים ש-G/N אבלית אם ורק אם $G' \leq N$.

הוכחה. הסעיף הראשון הוא מסקנה מיידית מהשני.
(רעיון ההוכחה: בסעיף השני נראה כי G/N איזומורפית למנה של $\overline{G}$, הרי שלפי משפט האיזומורפיזמים השלישי נקבל

$$(G/G')/(N/G') \cong G/N$$

וכל מנה של חבורה אבלית היא אבלית). כדי להוכיח את הסעיף נשים לב ש-G/N אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים

$$(aN)(bN) = (bN)(aN)$$

אם ורק אם $abN = baN$ אם ורק אם

$$\begin{aligned}(ab)^{-1}(ba) &\in N\\ b^{-1}a^{-1}ba &\in N\\ [b^{-1}, a^{-1}] &\in N\end{aligned}$$

אם ורק אם $[b^{-1}, a^{-1}]^{-1} = [a^{-1}, b^{-1}] \in N$, אם ורק אם $[a,b] \in N$ (כי עוברים על כל איברי G), אם ורק אם $G' \leq N$. הרי אם $S \subseteq H$, אז $\langle S \rangle \subseteq H$. $\square$

דוגמה 0.11. אם A אבלית, אז $A' = \{e\}$ ואכן $A/A' \cong A$ היא המנה האבלית הגדולה ביותר של A.

תרגיל 0.12 (לבית). הוכיחו שאין חבורת-p סופית מושלמת.

הערה 0.13. אם $H \leq G$, אז $H' \leq G'$.

0.2 סדרות תת־נורמליות וחבורות פתירות

הגדרה 0.14. תהי G חבורה. סדרה תת־נורמלית של G היא שרשרת של תת־חבורות

$$\{e\} = G_r \leq G_{r-1} \leq \cdots \leq G_0 = G$$

כך שתת־החבורות סמוכות הן נורמליות זו בזו. כלומר $G_{i+1} \lhd G_i$ לכל $0 \leq i \leq r-1$. לחבורות המנה G_i/G_{i+1} קוראים המנות של הסדרה (או הגורמים של הסדרה).

נדגיש שאין דרישה ל-$G_i \lhd G$!

דוגמה 0.15. לכל חבורה יש את הסדרה התת־נורמלית $G \lhd \{e\}$. יותר מעניין לבחור את $G = S_4$, ואז

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle (12)(34) \rangle \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

ונשים לב כי $\langle (12)(34) \rangle$ אינה נורמלית ב-S_4, ולכן הסדרה לא נורמלית. המנות של הסדרה הן $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}_2$.

הגדרה 0.16. סדרה תת־נורמלית של G נקראת סדרת הרכב אם כל המנות שלה הן פשוטות. כלומר אי אפשר לעדן אותה, והיא מקסימלית באורך שלה.

דוגמה 0.17. בדוגמה הקודמת ראינו סדרת הרכב של S_4. סדרת הרכב של S_{100} היא

$$\{\mathrm{id}\} \lhd A_{100} \lhd S_{100}$$

ולמעשה זו סדרת ההרכב היחידה שלה.

לחבורה $\mathbb{Z}$ אין סדרת הרכב. נניח בשלילה שיש סדרת הרכב

$$\{0\} = G_r \lhd G_{r-1} \lhd \cdots \lhd G_0 = \mathbb{Z}$$

ברור שהיא סדרה תת־נורמלית (ואפילו נורמלית). בפרט, G_{r-1} היא תת־חבורה לא טריוויאלית של $\mathbb{Z}$. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$G_{r-1} = n\mathbb{Z}$. אבל אז $G_{r-1}/G_r \cong n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ שאינה פשוטה (כי למשל $2n\mathbb{Z} \lhd n\mathbb{Z}$).

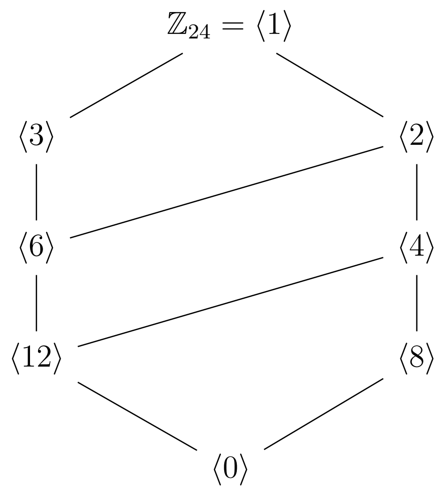
משפט 0.18 (ז'ורדן-הולדר)**.** תהי G חבורה (סופית) ותהינה שתי סדרות הרכב

$$\{e\} = G_r \lhd G_{r-1} \lhd \cdots \lhd G_0 = G$$
$$\{e\} = H_s \lhd H_{s-1} \lhd \cdots \lhd H_0 = G$$

שלה (אם קיימות כאלו). אז $r = s$ ויש להן את אותן המנות עד כדי סדר. כלומר יש שיוויון של הרב־קבוצות

$$\{\{G_0/G_1, G_1/G_2, \ldots, G_{r-1}/G_r\}\} = \{\{H_0/H_1, H_1/H_2, \ldots, H_{s-1}/H_s\}\}$$

דוגמה 0.19. נסו למצוא את כל סדרות ההרכב של $\mathbb{Z}_{24}$ בעזרת סריג תת־החבורות שלה:



ונקבל כי רב־הקבוצה של המנות שלה איזומורפית ל-$\{\{\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3\}\}$ שהיא בדיוק כמו רב־הקבוצה של S_4. זה עוד דרך להוכיח כי $24 = 2^3\cdot 3$. באופן כללי משפט ז'ורדן-הולדר ל-$\mathbb{Z}_n$ מוכיח שיש פירוק יחיד של n לראשוניים עד כדי סדר.

הוכחת ז'ורדן-הולדר. תהינה

$$\{e\} = G_r \lhd G_{r-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$
$$\{e\} = H_s \lhd H_{s-1} \lhd \cdots \lhd H_1 \lhd H_0 = G$$

שתי סדרות הרכב של G. נוכיח באינדוקציה של $|G|$.

אם G חבורה פשוטה (לא טריוויאלית), אז $r = s = 1$ ויש לה סדרת הרכב יחידה. אחרת $r, s > 1$.

אם $G_1 = H_1$, אז נשתמש בהנחת האינדוקציה עבור החבורה G_1 שהיא מסדר קטן מ-$|G|$.

אם $G_1 \neq H_1$, אז $G = G_1H_1$ כי G_1 ו-H_1 הן מקסימליות ב-G (שהרי המנות לגביהן פשוטות ולפי משפט ההתאמה אי אפשר לעדן את הסדרות בין G_1 או H_1 לבין G).

נסמן $K_2 = G_1 \cap H_1$. ברור כי $K_2 \lhd G$ כי היא חיתוך של תת־חבורות נורמליות. לפי משפט האיזומורפיזמים השני נקבל

$$G/G_1 = (G_1H_1)/G_1 \cong H_1/K_2$$
$$G/H_1 = (G_1H_1)/H_1 \cong G_1/K_2$$

ולכן K_2 מקסימלית ב-G_1 וב-H_1 כי המנות לגביה הן פשוטות. יש סדרת הרכב

$$\{e\} = K_t \lhd \cdots \lhd K_2$$

ואפשר להוסיף לפני K_2 את H_1 או את G_1 ואז את G, ולקבל שתי סדרות הרכב עבור G. נתבונן באוסף של כל המנות של סדרות ההרכב שפגשנו:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(G_r \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0) &= \{\{G/G_1, G_1/G_2, G_2/G_3, \dots\}\} && \text{הגדרה}\\
&\cong \{\{G/G_1, G_1/K_2, K_2/K_3, \dots\}\} && \text{אינדוקציה}\\
&\cong \{\{H_1/K_2, G/H_1, K_2/K_3, \dots\}\} && \text{חישוב לעיל}\\
&= \{\{G/H_1, H_1/K_2, K_2/K_3, \dots\}\} && \text{סידור מחדש}\\
&\cong \{\{G/H_1, H_1/H_2, H_2/H_3, \dots\}\} && \text{אינדוקציה}\\
&= \mathcal{Q}(H_r \lhd \cdots \lhd H_1 \lhd H_0) && \text{הגדרה}
\end{aligned}$$

וסיימנו את הוכחת המשפט. □

דוגמה 0.20. יש חבורות שיש להן כמה סדרות הרכב שונות, והמנות איזומורפיות לאורך כל הדרך. למשל אם S פשוטה ולא אבלית, אז לחבורה $G = S \times S$ יש שתי סדרות הרכב:

$$\{e_G\} \lhd S \times \{e_S\} \lhd S \times S$$
$$\{e_G\} \lhd \{e_S\} \times S \lhd S \times S$$

והמנות בשתי הסדרות הן S, S. אם S הייתה פשוטה אבלית מסדר p, אז היו ל-G בדיוק $p+1$ סדרות הרכב.

אם אנחנו יודעים מי הן המנות בסדרת הרכב של חבורה G, אז זה לא אומר שקיימת סדרת הרכב בכל סדר שנרצה. למשל ל-S_3 המנות הן $\mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}_3$ ויש לה רק סדרת הרכב אחת:

$$\{\mathrm{id}\} \lhd A_3 \lhd S_3$$

ואין לה סדרת הרכב שהמנה הראשונה בה היא $\mathbb{Z}_3$.

הגדרה 0.21. חבורה G נקראת פתירה אם יש לה סדרה תת־נורמלית שבה כל המנות אבליות.

דוגמה 0.22. כל חבורה אבלית A היא פתירה. הרי יש את הסדרה התת־נורמלית $\{e\} \lhd A$ וכל המנות שבה (רק A) הן אבליות.

יותר מעניין זה לשים לב ש-S_3 ו-S_4 הן פתירות לפי סדרות ההרכב שמצאנו מקודם.

הגדרה 0.23. תהי G חבורה. הסדרה הנגזרת של G היא הסדרה הנורמלית (אפילו אופיינית במלואה):

$$\cdots \lhd G^{(2)} \lhd G^{(1)} \lhd G^{(0)} = G$$

המוגדרת באופן רקורסיבי עם $G^{(0)} := G$ ו-$G^{(n)} := \left[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}\right] = (G^{(n-1)})'$. בפרט $G^{(1)} = G'$.

טענה 0.24. תהי G חבורה. אז G פתירה אם ורק אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$G^{(n)} = \{e\}$.

הוכחה. נניח כי $G^{(n)} = \{e\}$. אז נתבונן בסדרה

$$\{e\} = G^{(n)} \lhd \cdots \lhd G^{(2)} \lhd G^{(1)} \lhd G^{(0)} = G$$

שהיא סדרה תת־נורמלית, וכל מנה שלה $G^{(i)}/G^{(i+1)} = \overline{G^{(i)}}$ היא אבלית כי היא האבליניזציה של אחת מתת־החבורות בסדרה.

בכיוון השני, נניח כי G פתירה. לכן קיימת לה סדרה תת־נורמלית

$$\{e\} = H_s \lhd H_{s-1} \lhd \cdots \lhd H_0 = G$$

כאשר כל המנות H_i/H_{i+1} הן אבליות לכל i. נטען כי $G^{(i)} \le H_i$ לכל $0 \le i \le s$. אם זה נכון, אז עבור $i = s$ נקבל $G^{(s)} \le H_s = \{e\}$ ולכן $G^{(s)} = \{e\}$ מקיים את מה שצריך.

נוכיח את הטענה האחרונה באינדוקציה. עבור $i = 0$ ברור ש-$G^{(0)} \le H_0 = G$. נניח את נכונות הטענה עבור $i - 1$ ונוכיח עבור i. מניחים כי $G^{(i-1)} \le H_{i-1}$. לפי הידוע לנו H_{i-1}/H_i היא אבלית. לפי הטענה ממקודם על האבליניזציה נסיק כי H_i מכילה את תת־חבורת הנגזרת של H_{i-1}. לכן

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \le [H_{i-1}, H_{i-1}] \le H_i$$

וסיימנו כי המעבר באמצע הוא הנחת האינדוקציה. □

מסקנה 0.25. כל חבורה אבלית היא פתירה, שהרי $G^{(1)} = G' = \{e\}$.

מסקנה 0.26. כל חבורה פשוטה לא אבלית היא לא פתירה.

הוכחה. תהי G פשוטה לא אבלית. ראינו כי G מושלמת, כלומר $G' = G$. באינדוקציה נקבל $G^{(i)} = G$ לכל i טבעי. כלומר הסדרה הנגזרת של G לעולם לא תגיע ל-$\{e\}$. □

טענה 0.27. תהי G חבורה פתירה. כל תת־חבורה $H \le G$ פתירה.

הוכחה. כמו ששמנו לב מקודם אם $H \le G$, אז $H' \le G'$. באינדוקציה נקבל

$$H' = H^{(1)} \le G^{(1)} = G'$$
$$H^{(i)} \le G^{(i)}$$

לכל i טבעי. מפני ש-G פתירה, אז קיים n עבורו $G^{(n)} = \{e\}$ ולכן $H^{(n)} \le G^{(n)} = \{e\}$, אז $H^{(n)} = \{e\}$ ונסיק כי H פתירה. □

דוגמה 0.28 (בתרגול). הוכיחו כי S_n עבור $n \ge 5$ אינה פתירה.

טענה 0.29. תהי G חבורה, ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. התנאים הבאים שקולים:

1. החבורה G פתירה.

2. החבורות N ו-G/N פתירות.

הוכחה. נניח כי N ו-G/N פתירות. אז קיימות סדרות תת־נורמליות

$$\{e_N\} = N_s \lhd N_{s-1} \lhd \cdots \lhd N_0 = N$$
$$\{e_{G/N}\} = L_k \lhd L_{k-1} \lhd \cdots \lhd L_0 = G/N$$

שהמנות בשתי הסדרות כולן אבליות. לפי משפט ההתאמה לכל $L_i \leq G/N$ מתאימה תת־חבורה $N \leq H_i \leq G$ וההתאמה שומרת על נורמליות והכלה. לכן יש סדרה

$$N = H_k \lhd H_{k-1} \lhd \cdots \lhd H_0 = G$$

והמנות בה אבליות, למשל לפי משפט האיזומורפיזמים השלישי:

$$L_i/L_{i+1} = (H_i/N)/(H_{i+1}/N) \cong H_i/H_{i+1}$$

והנחנו כי L_i/L_{i+1} אבלית לכל i. נשרשר את שתי הסדרות ב-N:

$$\{e\} = N_s \lhd N_{s-1} \lhd \cdots \lhd N_0 = N = H_k \lhd H_{k-1} \lhd \cdots \lhd H_0 = G$$

והיא סדרה תת־נורמלית שכל המנות בה אבליות. לכן G פתירה.

בכיוון השני, נניח כי G פתירה. לפי הטענה הקודמת ברור כי N פתירה. נחשב קומוטטור של שני איברים ב-G/N:

$$[aN, bN] = (aN)(bN)(aN)^{-1}(bN)^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})N = [a, b]\,N$$

נזכר בהטלה הטבעית $\pi\colon G \to G/N$ שמוגדרת לפי $\pi(g) = gN$. מהחישוב לעיל

$$\pi(G') = (G/N)'$$

ובאינדוקציה נקבל $\pi(G^{(i)}) = (G/N)^{(i)}$ לכל i טבעי. אם G פתירה, אז קיים n עבורו $G^{(n)} = \{e_G\}$. לכן

$$(G/N)^{(n)} = \pi(G^{(n)}) = \pi(\{e_G\}) = \{e_{G/N}\}$$

ולכן G/N פתירה (ואפילו ממעלת פתירות שחסומה במעלת הפתירות של G). $\square$

מסקנה 0.30. אוסף החבורות הפתירות סגור לתת־חבורות, הטלות והרחבות (בפרט למכפלה ישרה).

הערה 0.31. חבורות פתירות הן מושג חשוב בהיסטוריה של תורת החבורות:

- גלואה הגדיר אותן.
- משפט ברנסייד קובע שאם חבורה G היא מסדר $p^a q^b$ עבור p, q ראשוניים, אז היא פתירה.
- משפט פייט-תומפסון קובע שכל חבורה מסדר אי זוגי היא פתירה.
- משפט של תומפסון קובע שאם לחבורה G מתקיים שכל תת־חבורה $\langle a, b\rangle$ היא פתירה, אז G פתירה.

0.3 חבורות נילפוטנטיות

הגדרה 0.32. תהי G חבורה, ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות. נגדיר את הקומוטטור שלהן

$$[H,K] = \langle \{[h,k] \,|\, h \in H, k \in K\} \rangle$$

טענה 0.33. תהי G חבורה ותהינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות. אז

1. מתקיים $[H,K] \leq H \cap K$.
2. מתקיים $[H,K] \lhd G$.

הוכחה. הסעיף הראשון יהיה עם בדיקה ישירה עבור קומוטטור בודד. יהיו $h \in H$ ו-$k \in K$. אז

$$[h,k] = hkh^{-1}k^{-1}$$

נשים לב ש-$hkh^{-1} \in K$ כי K נורמלית. בנוסף $k^{-1} \in K$, ולכן $[h,k] \in K$. באופן דומה $h, kh^{-1}k^{-1} \in H$ ולכן $[h,k] \in H$. באינדוקציה למכפלות של קומוטטורים נקבל $[H,K] \leq H \cap K$.

את הסעיף השני נוכיח עם סגירות להצמדה. יהי $g \in G$ ונחשב

$$g[h,k]g^{-1} = [ghg^{-1}, gkg^{-1}] \in [H,K]$$

כי $ghg^{-1} \in H, gkg^{-1} \in K$ מפני שהן נורמליות. באינדוקציה כמו באחת מהטענות מקודם מראים שמכפלת קומוטטורים סגורה להצמדה. לכן $[H,K] \lhd G$. $\square$

הגדרה 0.34. תהי G חבורה. הסדרה המרכזית היורדת שלה היא הסדרה

$$\cdots \lhd \gamma_2(G) \lhd \gamma_1(G) = G$$

כאשר $\gamma_1(G) = G$ ורקורסיבית $\gamma_n(G) = [G, \gamma_{n-1}(G)]$ לכל $n > 1$ טבעי. מקובל גם הסימון $G_n \coloneqq \gamma_n(G)$.

דוגמה 0.35. מתקיים $\gamma_2(G) = [G,G] = G'$. לפי הטענה הקודמת

$$\gamma_3(G) = [G, \gamma_2(G)] \lhd G$$

ובאינדוקציה $\gamma_n(G) \lhd G$.

הגדרה 0.36. חבורה G נקראת נילפוטנטית אם קיים n טבעי עבורו $\gamma_n(G) = \{e\}$.

המספר הקטן ביותר c עבורו $\gamma_{c+1}(G) = \{e\}$ נקראת מעלת הנילפוטנטיות של G.

דוגמה 0.37. חבורה היא נילפוטנטית ממעלת נילפוטנטיות 1 אם ורק אם $\gamma_2(G) = \{e\}$, אם ורק אם G אבלית.

חבורה היא נילפוטנטית ממעלת נילפוטנטיות 2 אם ורק אם היא לא אבלית, וגם

$$[G, G'] = \gamma_3(G) = \{e\}$$

וזה קורה אם ורק אם $G' \leq Z(G)$.

טענה 0.38. כל חבורה נילפוטנטית G היא פתירה.

הוכחה. נטען כי $G^{(n)} \leq \gamma_{n+1}(G)$ לכל n. נוכיח זאת באינדוקציה. ברור כי

$$G^{(0)} = G \leq \gamma_1(G) = G$$

ונניח כי $G^{(n-1)} \leq \gamma_n(G)$. אז

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \leq [G, G^{(n-1)}] \leq [G, \gamma_n(G)] = \gamma_{n+1}(G)$$

ולכן הטענה נכונה לכל n. אם G נילפוטנטית, אז קיים c טבעי עבורו $\gamma_{c+1}(G) = \{e\}$, ולכן

$$G^{(c)} \leq \gamma_{c+1}(G) = \{e\}$$

ונסיק כי G פתירה ממעלת פתירות שחסומה על ידי c. כהערת אגב, אם d זו מעלת הפתירות של חבורה נילפוטנטית, אז $d \leq 1 + \log_2 c$. $\square$

טענה 0.39. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. אז $f(\gamma_n(G)) \leq \gamma_n(H)$ לכל n טבעי.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n. ברור שעבור $n = 1$ מתקיים

$$f(\gamma_1(G)) = f(G) \leq H = \gamma_1(H)$$

לשלב האינדוקציה נניח $f(\gamma_{n-1}(G)) \leq \gamma_{n-1}(H)$. יהיו $g \in G$ ו-$x \in \gamma_{n-1}(G)$. אז

$$f([g,x]) = [f(g), f(x)] \in [H, \gamma_{n-1}(H)] = \gamma_n(H)$$

כל איבר של $\gamma_n(G)$ הוא מכפלה של קומוטטור, ונעזר שוב בכך ש-f הומומורפיזם:

$$[g_1,x_1][g_2,x_2]\dots[g_k,x_k] \in \gamma_n(G)$$
$$f([g_1,x_1][g_2,x_2]\dots[g_k,x_k]) = f([g_1,x_1])f([g_2,x_2])\dots f([g_k,x_k]) \in \gamma_n(H)$$

וסיימנו את ההוכחה. $\square$

טענה 0.40. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר $|G| = p^n$. אז G נילפוטנטית.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n. נוכיח שמעלת הנילפוטנטיות של G היא לכל היותר n.

אם $n = 1$ או $n = 2$, אז G אבלית. לכן היא נילפוטנטיות ממעלת נילפוטנטיות 1.

נניח את נכונות הטענה לכל חבורה מסדר p^k כאשר $k < n$. ידוע כי $Z(G) \lhd G$. אם $G = Z(G)$, אז היא אבלית ולכן היא נילפוטנטיות ממעלת נילפוטנטיות 1. אחרת ראינו כי

$$1 < |Z(G)| < |G|$$

כי G חבורת-p סופית והמרכז שלהן לא טריוויאלי. אז קיים $k < n$ עבורו $|G/Z(G)| = p^k$. לפי הנחת האינדוקציה נסיק כי $G/Z(G)$ נילפוטנטית וגם $\gamma_{k+1}(G/Z(G)) = \{e\}$.
נתבונן בהטלה הטבעית

$$\begin{aligned} \pi\colon G &\to G/Z(G) \\ g &\mapsto gZ(G) \end{aligned}$$

לפי הטענה הקודמת $\pi(\gamma_{k+1}(G)) \leq \gamma_{k+1}(G/Z(G)) = \{e\}$. לכן

$$\gamma_{k+1}(G) \leq \ker \pi = Z(G)$$

אז $\gamma_{k+2}(G) = [G, \gamma_{k+1}(G)] \leq [G, Z(G)] = \{e_G\}$ לפי הגדרת הסדרה המרכזית היורדת, וכך הוכחנו שמעלת הנילפוטנטיות היא לכל היותר $k+1 \leq n$. $\square$

מסקנה 0.41. מפני "שרוב" החבורות הסופיות הן חבורות-2, אז "רוב" החבורות הסופיות הן נילפוטנטיות.