תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). תהי תמורה $\sigma \in S_9$ המוגדרת לפי $\sigma(i) = 10 - i$. כתבו את σ כטבלה, כמכפלת מחזורים זרים ומצאו את הסימן שלה.

שאלה 2 (חימום). תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{60}/\langle 3\rangle$.

שאלה 3. הוכיחו שאם $H \leq G$ היא מאינדקס 2, אז $a^2 \in H$ לכל $a \in G$. רמז: מי הן המחלקות האפשריות ב-G/H? עכשיו צריך טענה שהופיעה בכיתה.

שאלה 4. מצאו את האינדקסים הבאים. משפט לגראנז' הוא שימושי.

א. $[\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60} : \langle (3,3)\rangle]$

ב. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (3,3)\rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

ג. $[\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times A_3]$ תזכורת: בתרגיל הבית השני הוכחתם $8\mathbb{Z}_{12} \leq \mathbb{Z}_{12}$.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות שלה.

א. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. הוכיחו שאם $|H| = 1000$ ו-$|K| = 77$, אז $H \cap K = \{e\}$.

תרגיל 6. תהי G חבורה מסדר 8.

א. הוכיחו שאם G ציקלית, אז יש לה תת־חבורה מסדר 4.

ב. הוכיחו שאם G לא אבלית, אז יש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

ג. מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם אם G אבלית.

ד. (רשות) הכללה למקרה שבו G היא חבורה לא אבלית מסדר 2^t (בהכרח $t > 2$). הוכיחו שיש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

שאלה 7 (רשות). תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם $|\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)| = 1$, אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
רמז: הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

שאלה 8 (רשות). כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$, ומדפיסה את התמורה כמכפלת מחזורים זרים.
הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים. למעשה אפשר לממש מחלקה שמייצגת תמורה, עם מתודות לכפל תמורות, למעבר בין הייצוגים השונים של התמורה, לתומך שלה, לסדר וכו'.

בהצלחה!