

## אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

7 בדצמבר 2020

1. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים ממשיים ממעלה לכל היותר 2:

$$(א) \quad x^4 + 16$$

$$(ב) \quad x^3 + 1$$

**פתרון:**

א. נמצא את פתרונות המשוואה  $z^4 = -16 = 16\text{cis}\pi$   $z_k = 2\text{cis}(\frac{\pi+2\pi k}{4})$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . הזויות הן:  $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$ , ומכאן ששני הצמודים הם:  $\{2\text{cis}\frac{\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}\}, \{2\text{cis}\frac{3\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}\}$ . מכאן נוכל למצוא את הגורמים:

הראשון:

$$(x - 2\text{cis}\frac{\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}) = x^2 - 2\text{Re}(2\text{cis}\frac{\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{\pi}{4}x + 4 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$$

השני:

$$(x - 2\text{cis}\frac{3\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}) = x^2 - 2\text{Re}(2\text{cis}\frac{3\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{3\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{3\pi}{4}x + 4 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$$

ובסה"כ:

$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

ב. נמצא את פתרונות המשוואה  $z^3 = -1 = \text{cis}180$   $z_k = \text{cis}(60 + 120k)$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ . הזויות הן:  $\{60, 180, 300\}$ . זויות של 180 נותנת לנו מספר ממשי  $(-1)$ , וממנה נקבל את גורם ממעלה 1:  $x + 1$ .

שתי הזויות האחרות נותנות לנו שני מספרים צמודים שמהם נקבל את הגורם השני:

$$(x - \text{cis}60)(x - \text{cis}300) = x^2 - 2\text{Re}(\text{cis}60)x + |\text{cis}60|^2 = x^2 - 2\cos 60x + 1 = x^2 - x + 1$$

ובסה"כ:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = z\bar{z} \quad (\text{ג})$$

$$f(x + yi) = e^y \text{cis} x \quad (\text{ד})$$

$$f(x + yi) = e^{xy} \text{cis}(xy) \quad (\text{ה})$$

$$f(x + yi) = \sin x \cos y + (\cos x \sin y)i \quad (\text{ו})$$

$$f(z) = (5 - i)z^3 - iz^5 + 6z^8 \quad (\text{ז})$$

**פתרון:**

א. נבדוק קושי רימן:  $U(x, y) = \cos x \cos y, V(x, y) = \sin x \sin y$ , לכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש  $U_x \neq V_y$  נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב.  $U(x, y) = xy, V(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ , ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיים:  $U_x = V_y, U_y = -V_x$ , ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

ג.  $f(x + yi) = x^2 + y^2, V(x, y) = 0$ , ולכן  $U(x, y) = x^2 + y^2$ . נמצא נגזרות חלקיות:

$$U_x = 2x, U_y = 2y$$

$$V_x = 0, V_y = 0$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ד. נקבל:  $U(x, y) = e^y \cos x, V(x, y) = e^y \sin x$ . נגזרות חלקיות:

$$U_x = -e^y \sin x, U_y = e^y \cos x$$

$$V_x = e^y \cos x, V_y = e^y \sin x$$

משוואות קושי רימן לא מתקיימות ( $-e^y \sin x \neq e^y \sin x$ ), ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ה.  $U(x, y) = e^{xy} \cos(xy), V(x, y) = e^{xy} \sin(xy)$ . נגזרות חלקיות:

$$U_x = ye^{xy} \cos(xy) - ye^{xy} \sin(xy) = ye^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy)), U_y = xe^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy))$$

$$V_x = ye^{xy} \sin(xy) + ye^{xy} \cos(xy) = ye^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy)), V_y = xe^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy))$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ו. כאן  $U(x, y) = \sin x \cos y, V(x, y) = \cos x \sin y$ , ולכן הנגזרות החלקיות:

$$U_x = \cos x \cos y, U_y = -\sin x \sin y$$

$$V_x = -\sin x \sin y, V_y = \cos x \cos y$$

משוואות קושי רימן לא מתקיימות ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ז. לפי מה שלמדנו על נגזרת פולינום נקבל:

$$f'(z) = (15 - 3i)z^2 - 5uz^4 + 48z^7$$

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א)  $e^{1+2i}$

(ב)  $e^{5\text{cis}\pi}$

(ג)  $e^{\text{cis}\frac{\pi}{4}}$

**פתרון:**

א.  $e^{1+2i} = e^1 \text{cis} 2 = e \text{cis} 2$ .

ב.  $e^{5\text{cis}\pi} = e^{-5}$ .

ג. כאן נצטרך להעביר תחילה את  $\text{cis}\frac{\pi}{4}$  לצורה קרטזית:  $\text{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .  
 ולכן:  $e^{\text{cis}\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{cis}\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

בהצלחה!