

קורס: 83-211-01  
מרצה: ש. הורוביץ  
י"ג אדר א' תשע"א

## מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.  
משך הבחינה שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. מצאו את כל המספרים  $z$  ב- $\mathbb{C}$ , כך ש- $(z + \frac{1}{z})^2 = -1$ . כתבו את הפתרונות בצורה  
 $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$

2. תהי  $f(z)$  פונקציה אנליטית בתחום  $D \subset \mathbb{C}$ . עבור  $z = x + iy \in D$  נגדיר  
 $h(x, y) = |f(x + iy)|^2 = |f(z)|^2$ . הוכיחו שב- $D$  מתקיים  $h_{xx} + h_{yy} = 4|f'(z)|^2$ .

3. חשבו:  $\int_{\gamma} (z - \bar{z})^2 dz$  כאשר  $\gamma$  היא השפה של המלבן  
 $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 1\}$  מתוארת נגד כיוון השעון.

4. א. תהי  $f(z)$  פונקציה זוגית ( $f(-z) = f(z)$ ) שאנליטית בכל  $\mathbb{C}$  פרט ל-0, ויהי  
 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  טור לורן של  $f$  סביב 0. הוכיחו שלכל  $n$  אי זוגי  
 $a_n = b_n = 0$ .  
ב. הוכיחו שלכל מסילת ג'ורדן  $\gamma$  שאינה עוברת דרך הנקודה  $z = 0$   
 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

5. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 16} dx$  והצדיקו את תשובתכם.

6. נגדיר  $p(z) = z^6 - z^3 - 2z^2 - 48$ . מצאו מספר מינימלי  $R > 0$  כך שכל האפסים של  
 $p(z)$  מוכלים בתוך העיגול  $\{z : |z| \leq R\}$  והצדיקו את תשובתכם. הדרכה: קל לנחש  
אחד האפסים של  $p(z)$ .

