תרגיל בית 10 – טופולוגיה 2014

שאלה 1

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.

ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל-τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל-τ.

ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל-(X,τ_1). אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

שאלה 2

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F \subseteq X, G \subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F \times G$ סגורה ב-$X \times Y$.

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ (או בסימון חלופי: $cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$).

ג. יהי (X,τ_{cof}) מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית. נסמן ב-τ את טופולוגיית המכפלה על $X \times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקו-סופית על $X \times X$? הוכיחו או הפריכו!

שאלה 3

א. יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X \times X$ להיות $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$.
הראו שאם Δ סגור ב-$X \times X$ אזי X הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי (X,τ) עם קבוצה צפופה $A \subseteq X$ ושתי פונקציות <u>רציפות</u> <u>שונות</u> $f,g : X \to X$ המתלכדות על A.

שאלה 4

יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-$X_1 \times X_2 \cong X_2 \times X_1$.

<u>שאלה 5</u>

תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה ונגדיר שני אוספים של תת-קבוצות של X:

$B_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},...\}$, ו- $B_2 = \{Z \subseteq X : \ X \setminus Z = \{1,2,3,...,n\}$ עבור n $\}$.

א. הוכיחו כי $B = B_1 \cup B_2$ הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X.

ב. הוכיחו ש-(X, τ) הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

<u>שאלה 6</u>

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

<u>הדרכה מומלצת:</u>

א. הראו שלכל $a < b$ קיימים $c < d$ כך ש-$f[a,b] = [c,d]$; בנוסף,

ב. ($f(a) = c$ וגם $f(b) = d$) או ($f(a) = d$ וגם $f(b) = c$)

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

<u>שאלה 7</u>

א. הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס המורכב מקבוצות סגורות.

ב. הוכיחו ש-$\left\{ B_{d_5}\left(a, \frac{1}{5^n}\right) : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ מהווה בסיס למרחב המטרי

$(\mathbb{Z}, d_5)$.

בְּהַצְלָחָה!