תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. א) $z^2 \sin z$ סביב $z=0$. היות שידוע ש

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

ב) נציב $w = z - \frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned}(w+\frac{\pi}{2})^2 \sin(w+\frac{\pi}{2}) &= (w+\frac{\pi}{2})^2 \cos(w) \\ &= w^2 \cos(w) + \pi w \cos w + \frac{\pi^2}{4} \cos w\end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

כאשר

$$a_k = \begin{cases} \frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k = 2n+1 \\ (-1)^n (\frac{\pi^2}{4(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!}) & k = 2n \quad k \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & k = 0 \end{cases}$$

1. ג. נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-(-(\frac{z}{\sqrt{3}})^4)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{\sqrt{3}}^4)^n = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n}z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n}z^{4n+1}$$

2. נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R. היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z=1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z=1$ כלומר $R \le 1$ ולכן לסיכום $R=1$.

3. (א) לפי נוסחת קושי הדמר טריוויאלי לראות שרדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

כמו כן, עבור נקודות z שבהן $|z|=1$ קל לראות שהטור מתבדר כי הסדרה של הטור לא מתכנסת ל0. לסיכום תחום ההתכנסות הוא

$$\{z \mid |z|<1\}$$

(ב) הפרינציפ הוא כמובן לשים לב שיש כאן פחות או יותר נגזרת שניה של הטור ההנדסי הרגיל $\sum z^n$. ליתר דיוק, לפי גזירה איבר איבר מקבלים

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{n-1}\\ &= z\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)z^n)' = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^{n+1})'' =\\ &= z(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1})'' = z(\frac{z^2}{1-z})'' = z(\frac{2z-z^2}{(1-z)^2})'\\ &= -z(1-\frac{1}{(z-1)^2})' = -z(\frac{2}{(z-1)^3}) = \frac{-2z}{(z-1)^3}\end{aligned}$$

4. $f(z)$ שלמה ולכן יש לה פיתוח לטור טיילור בכל $\mathbb{C}$. שני האיברים הראשונים בטור טיילור הם 0 (כי $f(0)=f'(0)=0$) כלומר

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

אז אם נגדיר

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{f^{(2)}(0)}{2} = \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

אז $g(z)$ תהיה גם כן שלמה. נשים לב שלפי הנתון, לכל z כך ש $|z| \geq 10$ מתקיים ש $|g(z)| \leq 1$ כלומר $g(z)$ חסומה ב $\{z \mid |z| \geq 10\}$ אבל בוודאי ש $g(z)$ חסומה גם ב $\{z \mid |z| \leq 10\}$ (היא רציפה וזה תחום סגור וחסום). ולכן בסה"כ $g(z)$ חסומה. לפי משפט ליוביל $g(z)$ קבועה כלומר

$$g(z) = g(0) = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2$$

היא הפונקציה היחידה שמקיימת את הדרישות הנ"ל.