פתרון תרגיל בית 8 – מופשטת 1

שאלה 1

תהי G חבורה, ו- $A,B \leq G$ שתי תת חבורות שלה. הוכיחו שכל שתיים מבין התכונות הבאות גוררות את השלישית:

א. $A \bigcap B = \{1\}$;

ב. $AB = G$;

ג. $|A| \cdot |B| = |G|$.

פתרון

נגדיר פונקציה $f : A \times B \to G$ על-ידי $f(a,b) = ab$. מתקיים:

f חח"ע $\Leftrightarrow$ תנאי א' מתקיים;

f על $\Leftrightarrow$ תנאי ב' מתקיים.

כלומר, כעת השאלה היא:

יהיו X,Y קבוצות ותהי $f : X \to Y$ פונקציה. אזי כל שניים מהתנאים הבאים גוררים את השלישי:

א. f חח"ע;

ב. f על;

ג. $|X| = |Y|$.

ואת הטענה הזאת אנחנו כבר מכירים מבדידה.

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו:

א. אוטומורפיזם נקבע על-ידי התמונות של קבוצת יוצרים (רמז: ראיתם שזה נכון עבור הומומורפיזם);

ב. אוטומורפיזם מעביר מחלקת צמידות למחלקת צמידות (רמז: הראו שאם x,y צמודים, אזי גם התמונות שלהם תחת אוטומורפיזם צמודות);

ג. אוטומורפיזם שומר על התחלפות ועל אי-התחלפות (רמז: הוא הפיך).

<u>פתרון</u>

א. תהי G חבורה, $\{x_1,...,x_k\}$ קבוצת יוצרים ו- $f:G\to G$ אוטומורפיזם. נסמן $f(x_i)=y_i$ לכל $1\le i\le k$. יהי $a\in G$ אזי קיימים יוצרים $x_{i_1},...,x_{i_r}$ ומספרים טבעיים $\alpha_1,...,\alpha_t$ כך ש- $a=x_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_{i_t}^{\alpha_t}$. לכן

$f(a)=f\left(x_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_{i_t}^{\alpha_t}\right)=f\left(x_{i_1}\right)^{\alpha_1}\cdot...\cdot f\left(x_{i_t}\right)^{\alpha_t}=y_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot y_{i_t}^{\alpha_t}$.

ב. תהי G חבורה ויהיו x,y שני איברים צמודים. כלומר, קיים $g\in G$ כך ש- $x=gyg^{-1}$. יהי $f:G\to G$ אוטומורפיזם. מתקיים:

$f(x)=f\left(gyg^{-1}\right)=f(g)f(y)f(g)^{-1}$ ולכן $f(x),f(y)$ צמודים.

ג. תהי G חבורה ויהיו x,y שני איברים מתחלפים. יהי $f:G\to G$ אוטומורפיזם. מתקיים: $f(x)f(y)=f(xy)=f(yx)=f(y)f(x)$. בדרך דומה מראים את הטענה על אי-התחלפות.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

<u>תזכורת</u>: עבור $H\le G$ מגדירים את ה**מנרמל** של H ב- G להיות $N_G(H):=\{g\in G: gH=Hg\}$. כאשר ההקשר ברור, נרשום פשוט $N(H)$.

הוכיחו:

א. $N(H)\le G$ ו- $H\triangleleft G\Leftrightarrow N(H)=G$;

ב. $H\triangleleft N(H)$;

ג. אם $H\triangleleft K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח תחילה כי $N(H)\le G$. ברור ש- $N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G\in N(H)$.

יהיו $a,b\in N(H)$. מתקיים:

$(ab)H=a(bH)=a(Hb)=(aH)b=(Ha)b=H(ab)$ ולכן $ab\in N(H)$.

כעת, יהי $a\in N(H)$. מתקיים: $\left(a^{-1}\right)H=(aH)^{-1}=(Ha)^{-1}=H\left(a^{-1}\right)$ ולכן $a^{-1}\in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H \triangleleft G \Leftrightarrow N(H)=G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H \triangleleft G$ אזי $gH=Hg$ לכל $g \in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב. רואים מההגדרה כי $H \subseteq N\left(H\right)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית. קל לראות שלכל $a \in N\left(H\right)$ ולכל $h \in H$ מתקיים $aha^{-1} \in H$.

ג. מספיק להראות ש- K מוכלת ב- $N\left(H\right)$ (מדוע?). $H \triangleleft K$ ולכן לכל $k \in K$ מתקיים $kHk^{-1}=H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k \in N\left(H\right)$. לכן, $K \subseteq N\left(H\right)$.

מש"ל

שאלה 4

נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\left\{\sigma \in S_6 : \sigma\left(2\right)=2, \sigma\left(4\right)=4, \sigma\left(6\right)=6\right\}$.

א. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?

ב. הוכיחו שב- $N\left(H\right)$ יש שתי תת-חבורות K,L – כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L \cap K=\left\{id\right\}$.

פתרון

א. ההוכחה ש- H היא תת חבורה – פשוט לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים $2,4,6$ ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל תמורות של המספרים $\left\{1,3,5\right\}$. לכן $H \cong S_3$. H אינה תת חבורה נורמלית ב- S_6, שכן תת חבורה נורמלית (בחבורת התמורות) צריכה להכיל את כל התמורות מאותו המבנה. עם זאת, $\left(1\,3\,5\right) \in H$, אך התמורה הצמודה לה לא נמצאת שם - $\left(1\,2\,4\right) \notin H$.

ב. החבורה הראשונה היא H עצמה (שכן היא תת חבורה של המנרמל שלה ואכן איזומורפית ל- S_3). החבורה השניה היא :

$K=\left\{\sigma \in S_6\ :\ \sigma\left(1\right)=1, \sigma\left(3\right)=3, \sigma\left(5\right)=5\right\}$. מתקיים $K \cap H=\left\{id\right\}$. כמו כן, כל האיברים של K (פרט לתמורת הזהות) זרים לאיברי H ולכן מתקיים:

<u>לכל</u> $k \in K$ $kH = Hk$ ולכן $K \leq N(H)$. קל לראות מדוע גם K איזומורפית ל- S_3.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל $\mathbb{Z}_{25}$;

ב. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_8$;

ג. זהו את החבורה $Aut\left(GL_n(\mathbb{Z}_7) / SL_n(\mathbb{Z}_7) \right)$ (לכל n>0).

<u>פתרון</u>

א. $\varphi(8) = 4, \varphi(25) = 20$.

ב. 80.

ג. לכל שדה F, הגרעין של האפימורפיזם $\det : GL_n(F) \to F^*$ הוא $SL_n(F)$.

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- $GL_n(F) / SL_n(F) \cong F^*$.

בפרט, $GL_n(\mathbb{Z}_7) / SL_n(\mathbb{Z}_7) \cong \mathbb{Z}_7^* \cong U_7$ וזו חבורה אבלית מסדר 6. כעת, U_7 היא חבורה ציקלית הנוצרת על ידי 3 (בדקו זאת!), ולכן איזומורפית ל- $(\mathbb{Z}_6, +)$. לכן צריך למעשה למצוא את $Aut(\mathbb{Z}_6)$. הוכחנו בעבר ש- $Aut(\mathbb{Z}_6) \cong U_6$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו $Aut(S_3) \cong S_3$.

<u>פתרון</u>

הוכחנו בעבר שלכל $n \geq 3$ מתקיים $Z(S_n) = \{1_{S_n}\}$. מכאן $Inn(S_3) \cong S_3 / Z(S_3) \cong S_3$.

לכן כדי להסיק ש $Aut(S_3) \cong S_3$ מ"ל שיש לכל היותר 6 (זהו הסדר של S_3) אוטומורפיזמים (המשמעות היא שכל האוטומורפיזמים הם פנימיים).

ראינו ש- $S_3=\langle(12),(123)\rangle$. אוטומורפיזם נתון φ נקבע עפ"י תמונת היוצרים.
איזומורפיזם שומר על סדר איברים וישנם בדיוק שלושה איברים מסדר 2 (אלו החילופים) ב- S_3 ולכן ישנם לכל היותר שלושה ערכים אפשריים ל- $\varphi(12)$.
ישנם בדיוק שני איברים מסדר 3 ולכן ישנן שתי אפשרויות עבור $\varphi(123)$.
בסה"כ נקבל שיש לכל היותר $2\cdot 3=6$ אוטומורפיזמים אפשריים ונקבל הדרוש.
מש"ל

שאלה 7

תהי G חבורה סופית ונניח $|G|>2$. הוכיחו כי $|Aut(G)|\geq 2$.

פתרון

קודם כל, $Id\in Aut(G)$, וכן לכל $g\in G$ מתקיים $\gamma_g\in Aut(G)$. אם $\gamma_g\neq Id$, סיימנו. מתי זה קורה? אם $g\notin Z(G)$.
לכן, אם G אינה אבלית, ניתן לקחת איבר לא מרכזי $g\in G$ ויתקיים $Id,\gamma_g\in Aut(G)$ (מה שמוכיח הדרוש).
במקרה האבלי נצטרך למצוא אוטומורפיזם אחר (פרט לזהות). בואו נתבונן באוטומורפיזם הלוקח כל איבר להופכי שלו. כלומר $f:G\to G$ המוגדר על-ידי $f(g)=g^{-1}$. בדקו שזהו אכן אוטומורפיזם! מה יכול "להשתבש" כאן? כלומר, האם יתכן ש- $f=Id$? התשובה היא כן, כאשר כל איבר בחבורה הוא ההופכי של עצמו (כלומר, מסדר 2).
לכן אם G אבלית אבל לא כל האיברים מסדר 2, אז סיימנו.
נניח שכל האיברים הם מסדר 2 (פרט לאיבר היחידה, כמובן). כעת עלינו למצוא אוטומורפיזם נוסף פרט לזהות. היזכרו שבמקרה זה G היא למעשה מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$. לכן אוטומורפיזם לא טריוויאלי שנוכל לקחת הוא העתקה לינארית כלשהי העושה פרמוטציה על איברי הבסיס.
מש"ל