בוחן תשע"ו - אלגברה מופשטת 1

גרסה 1

יש לכתוב שם מלא, תעודת זהות, שם המרצה אליו אתם רושמים וקבוצת התרגול אליה אתם רוצים שיחזור הבוחן.

ענו על שאלה 1 (20 נק') ועל שתי שאלות מתוך שאלות 2,3,4 (40 נק' כל אחת).

1. כיתבו במחברת את התשובה הנכונה עבור $H = \left\langle \sigma^2 \right\rangle \leq D_5$:

(א) H נורמלית ואבלית.

(ב) H נורמלית ולא אבלית.

(ג) H לא נורמלית ואבלית.

(ד) H לא נורמלית ולא אבלית.

פתרון: (a). H ציקלית (מהגדרתה) ולכן אבלית. כמו כן, שימו לב ש $\langle \sigma^2 \rangle = \langle \sigma \rangle$, שהיא כידוע חבורה מאינדקס 2 ולכן נורמלית.

2. (א) הוכיחו שהקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_5 \right\} = H$ היא חבורה ביחס לכפל מטריצות.

(ב) מצאו את הסדר של החבורה $|H|$.

(ג) לכל מספר טבעי k המחלק את $|H|$, מצאו תיאור מפורש לתת־חבורה של H מגודל k.

פתרון:

(a)צ"ל: קיום איבר יחידה, סגירות לכפל וקיום הופכי.

איבר יחידה: עבור $a=b=c=0$ נקבל את מטריצת היחידה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

סגירות לכפל: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x+a) \mod 5 & (y+az+b) \mod 5 \\ 0 & 1 & (c+z) \mod 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

אכן איבר בH.

הופכי: עבור $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ נקח את $\begin{pmatrix} 1 & 5-a & (ac-b) \mod 5 \\ 0 & 1 & 5-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. זה איבר ב$H$ וניתן להכפיל ולראות שזה אכן יוצא מטריצת היחידה.

(b) יש 3 משתנים לקבוע, ולכל אחד מהם יש 5 אפשרויות, לכן $|H| = 5^3 = 125$.

(c) צריך למצוא תתי חבורות מסדרים: 1,5,25,125 .

מסדר 1: החבורה הטריוויאלית.

מסדר 125: H בעצמה.

מסדר 5: החבורה הציקלית שנוצרת ע"י $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. קל לבדוק שהאיבר הזה אכן מסדר 5, ולכן הוא יוצר חבורה מסדר 5.

מסדר 25: ניקח את מה שנוצר ע"י $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. קל לבדוק ששני האיברים האלה מתחלפים והסדר של כל אחד מהם הוא 5, לכן הם יוצרים ביחד תת חבורה מסדר 25.

3. (א) האם החבורה $\mathbb{Z}_7 \times U_7$ היא צקלית? אם כן מצאו יוצר, אם לא הסבירו מדוע.

(ב) תהי G חבורה סופית. הוכיחו או הפריכו: לכל שני איברים $a, b \in G$ מתקיים $o(ab) = lcm\,(o(a), o(b))$.

פתרון:

(a) הסדר של U_7 הוא 6, לכן $|\mathbb{Z}_7 \times U_7| = 7 \cdot 6 = 42$.

ע"מ להוכיח שהחבורה היא ציקלית מספיק למצוא איבר מסדר 42.

ידוע שלכל $(a, b) \in \mathbb{Z}_7 \times U_7$ $o((a, b)) = lcm(o(a), o(b))$.

$o(1)$ ב $\mathbb{Z}_7$ הוא 7, ו$o(3)$ ב U_7 הוא 6 (בידקו) ולכן $o((1, 3)) = lcm(6, 7) = 42$.

האיבר $(1, 3)$ יוצר את החבורה.

(b)הפרכה: נקח $e \neq a \in G$ ו $b = a^{-1}$. הוכחנו בתרגול ש $o(a) = o(b)$ ולכן $lcm(o(a), o(b)) = o(a) \neq 1$ אולם $o(ab) = 0(1) = 1$.

4. תהי G חבורה.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f : G \to G$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ היא הומומורפיזם אס"ם G היא אבלית.

(ב) נניח G אבלית, הוכיחו כי $N = \left\{ x \in G \,|\, x^2 = e \right\}$ היא תת־חבורה של G. האם היא נורמלית? (נמקו בקצרה).

פתרון:

(a) לכיוון הראשון נניח ש G אבלית. צ"ל $f(xy) = f(x)f(y)$. כלומר: $(xy)^2 = x^2y^2$. ומהאבליות זה אכן מתקיים.

לכיוון השני, אם f הוא הומו' זה אומר שלכל $x, y \in G$ $f(xy) = f(x)f(y)$, כלומר $(xy)^2 = x^2y^2$. והוכחנו בתרגול הראשון שאם התנאי הזה מתקיים, אז החבורה היא בהכרח אבלית.

(b) צ"ל: סגירות לכפל ולהופכי.

סגירות לכפל: יהיו $x, y \in N$. $(xy)^2 = x^2y^2 = e \cdot e = e$. לכן $xy \in N$.

סגירות להופכי: יהי $x \in N$. $e^{-1} = e$ $(x^{-1})^2 = (x^2)^{-1} =$, לכן $x^{-1} \in N$.

N היא תת חבורה נורמלית משום שבחבורה אבלית כל תת חבורה היא נורמלית.