פתרון תרגיל בית 6

<u>שאלה 1</u>

הראו שהתמורות $(132),(123)$ שיש להן אותו מבנה מחזורים, אינן צמודות ב- A_4.
הראו שהן כן צמודות ב- A_5.

<u>פתרון</u>

תהי $\mu \in S_4$ המקיימת $\mu(123)\mu^{-1} = (132)$. נראה ש $\mu \notin A_4$.
$\mu(123)\mu^{-1} = (\mu(1)\mu(2)\mu(3))$. אם $(\mu(1)\mu(2)\mu(3)) = (132)$ אזי ישנן שלוש אפשרויות ל μ שנסמן μ_1, μ_2, μ_3.

אפשרות ראשונה: $\mu_1(1)=1$, $\mu_1(2)=3$, $\mu_1(3)=2$ אבל אז $\mu_1 = (23)$ וזהו חילוף ולכן $\mu_1 \notin A_4$.

אפשרות שניה: מתקבלת מהבחנה $(\mu(1)\mu(2)\mu(3)) = (321) = (132)$.

נקבל $\mu_2(1)=3$, $\mu_2(2)=2$, $\mu_2(3)=1$ ושוב קל לראות ש μ_2 הוא חילוף ולכן $\mu_2 \notin A_4$.

אפשרות שלישית: נשים לב שגם $(\mu(1)\mu(2)\mu(3)) = (213)$ ושוב מקבלים (איך?) חילוף שאינו ב A_4.

בסה"כ נקבל שהתמורות אינן צמודות ב A_4.

מאידך, ב A_5 התמורות צמודות. ניעזר למשל ב $\mu_1 = (23)$ הנ"ל שניתן לראותו גם כאיבר ב S_5. נשים לב ש $\sigma = (23)(45) \in A_5$ וכן $\sigma(123)\sigma^{-1} = (132)$.

<u>שאלה 2</u>

תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:

a. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A = B$.

<u>פתרון</u>

ניקח $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $A = \{0\} \times \{0,1\}$, $B = \{0,1\} \times \{0\}$, ומתקיים הדרוש.

b. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.

__פתרון__

ניקח $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $A = \{(0,0),(2,0)\}$, $B = \{(0,0),(0,1)\}$.

c. אם $G \cong G/A$ אזי A היא תת-החבורה הטריוויאלית.

__פתרון__

ניקח $G = \mathbb{C}^*$, $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ המקיימת $f(x) = x^2$. אזי עבור $A = \ker(f) = \{1,-1\}$ מתקיים $G \cong G/A$, בעוד ש-A אינה טריוויאלית.

__שאלה 3__

תהי G חבורה ויהיו $N,M \lhd G$, $H \le G$. נניח כי $H \cap M = H \cap N = \{e\}$.

הוכיחו כי: $HM/M \cong HN/N$.

__הוכחה__

$N,M \lhd G$ לכן $HM, HN \le G$. לפי משפט האיזומורפיזם השני נקבל:

$HM/M \cong H/H \cap M = H/\{e\} = H$ ומסיבות סימטריה נקבל: $HN/N \cong H$ ולכן

מטרנזיטיביות האיזומורפיזם נקבל $HM/M \cong HN/N$.

__שאלה 4__

תהי $Q_8 = \{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:

$ijk = k^2 = j^2 = i^2 = -1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים**.

השלימו את לוח הכפל.

א) מצאו את כל תתי החבורות של Q_8

ב) הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא תת חבורה נורמלית. (__רמז__: בדקו את האינדקס של תתי החבורות).

ג) הוכיחו ש-Q_8 אינה איזומורפית ל-D_4.

<u>פתרון</u>

ב- Q_8 יש 3 תתי-חבורות מסדר 4:

$\{\pm1,\pm i\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי i,

$\{\pm1,\pm j\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי j,

$\{\pm1,\pm k\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי k.

האינדקס של כל אחת מהן הוא: $[Q_8:H]=\frac{8}{4}=2$

ולכן כל אחת מהן היא נורמלית עפ"י הטענה שכל ת"ח בעלת אינדקס 2 היא נורמלית.

יש ת"ח אחת מסדר 2: $\{1,-1\}$. ת"ח זו היא גם המרכז של חבורת הקווטרניונים כיוון שרק עבור $1,-1$ מתקיים: $-1\cdot x=x\cdot(-1)=-x$, $1\cdot x=x\cdot 1=x$ לכל $x\in Q_8$. לכן היא נורמלית.

כמובן שיש גם ת"ח טריוויאלית מסדר 1 והיא $\{1\}$,והיא נורמלית כי 1 הוא האיבר הנייטרלי של החבורה.

מדוע אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8 ?

לפי משפט לגרנז' סדר של תת-חבורה מחלק את סדר החבורה, וכיוון ש- $|Q_8|=8$ כל ת"ח של חבורת הקווטרניונים היא מסדר 1,2 או 4.

<u>מסדר 1</u>- $\{1\}$ היא הת"ח היחידה מסדר 1.

<u>מסדר 2</u>- בת"ח מסדר 2 האיבר האחד הוא הניטרלי-1 ולכן השני חייב להיות איבר מסדר 2 ו-(1-) האיבר היחיד מסדר 2 בחבורת הקווטרניונים. לכן אין עוד ת"ח מסדר 2 ב- Q_8.

<u>מסדר 4</u>- ניקח למשל את i (ובאופן סימטרי זה יהיה נכון גם אם נקח את j או k). אז ת"ח זו חייבת להכיל את כל חזקות i כדי שתהיה סגירות לפעולה לכן ת"ח זו מכילה את $\{\pm1,\pm i\}$. זאת אומרת שהת"ח היא לפחות מסדר 4 . אבל לפי לגרנז' אין ת"ח ממש גדולה יותר שמכילה אותה.

לכן מלבד שלוש תתי-החבורות מסדר 4 הנזכרות, אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8.

כעת, Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4:

ב- Q_8 כל תת חבורה מסדר 4 היא ציקלית, וב- D_4 לא (יש אחת שאינה ציקלית, מיהי?). הסבר נוסף: ב- D_4 יש 5 איברים מסדר 2, וב- Q_8 יש רק איבר אחד מסדר 2.

לוח הכפל-

·	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
1	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
−1	−1	1	−i	i	−j	j	−k	K
i	i	−i	−1	1	k	−k	−j	J
−i	−i	i	1	−1	−k	k	j	−j
j	j	−j	−k	k	−1	1	i	−i
−j	−j	j	k	−k	1	−1	−i	I
k	k	−k	j	−j	−i	i	−1	1
−k	−k	k	−j	j	i	−i	1	−1

שאלה 5

מצאו את כל תת החבורות של S_4 המכילות את תת החבורה $V=\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$.

רמז: משפט ההתאמה + העובדה ש- $S_4/V \cong S_3$.

פתרון

תחילה נשים לב ש- $S_4/V \cong S_3$, וזאת מכיוון שיש רק חבורה אחת לא אבלית מסדר 6 (עד כדי איזומורפיזם).

מכיוון ש- $S_4/V \cong S_3$, ממשפט ההתאמה נקבל שמספר תתי החבורות של S_4 המכילות את V שווה למספר תתי החבורות של S_3. מבדיקה וחישוב קל לבדוק שאלה הן תתי החבורות של S_3:

$S_3, A_3, \langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle, \{id\}$.

כלומר, יש 6 תתי חבורות של S_4 המכילות את V. נחשב את סדרן.

נשים לב שלפי משפט ההתאמה האינדקס של תת החבורה נשמר תחת ההתאמה. כלומר, אם $\left[S_3:\langle(12)\rangle\right]=3$ אזי לתת החבורה $\langle(12)\rangle$ מתאימה תת חבורה של S_4 מאינדקס 3 (כלומר, מסדר 8).

לכן, אנחנו מחפשים 6 תתי חבורות של S_4 שכל אחת מהן מכילה את V, והסדרים שלהן הם: 24,12,8,8,8,4.

הסדר	תת החבורה המתאימה
24	S_4
12	A_4
8	$\{id,(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1324),(1423)\}$
8	$\{id,(13),(24),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1234),(1432)\}$
8	$\{id,(14),(23),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1243),(1342)\}$
4	V

שאלה 6

תהיינה $A,B,C \triangleleft G$ כך ש- $B\subseteq A$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

פתרון

ראשית שימו לב שמנתוני השאלה $B \triangleleft A$ שכן $B \triangleleft G$ וגם $B \leq A$ (תורשתיות).
כמו כן, מהתנאי $A,B,C \triangleleft G$ נקבל ש $AC,BC \triangleleft G$, ומכך ש$B \leq A$ נסיק ש $BC \leq AC$ ולכן מתורשתיות $BC \triangleleft AC$. מכאן A/B ו AC/BC אכן חבורות.
נמצא אפימורפיזם $f: A/B \to AC/BC$ ואז ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש $AC/BC \cong (A/B)/\ker f$ ומכאן AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

תהי $f: A/B \to AC/BC$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(aB)=aBC$. שימו לב ש $A\subseteq AC$ (כי $e_G \in C$) ולכן אם $a\in A$ אז גם $a \in AC$. נוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב.
נניח $a_1B=a_2B$ אזי $a_1(BC)=(a_1B)C=(a_2B)C=a_2(BC)$ ולכן הפונקציה מוגדרת היטב. בנוסף,

$f(a_1Ba_2B)=f(a_1a_2B)=a_1a_2BC=a_1BCa_2BC=f(a_1B)f(a_2B)$ ולכן זהו הומומורפיזם. נותר להראות שהוא על. אבל זה נובע מכך שלכל $a\in A,c\in C$
$f(aB)=aBC=aCB=a\left(cC\right)B=acCB=acBC$.

<u>שאלת בונוס</u> (10 נקודות)

"המשחק ב-15" הוא שמה של חידה שפרסם החידונאי סם לויד ב-1880. בחידה זו מסודרות לוחיות ממוספרות מ-1 עד 15 בלוח בגודל 4×4, כך שמשבצת אחת נותרת ריקה. הלוחיות מונחות במקומן, למעט הלוחיות 14 ו-15 המוחלפות זו עם זו. לויד הציע פרס כספי למי שיסדר את הלוחיות בחזרה על-יד הזזת לוחית אחת בכל פעם למשבצת הריקה. הראו שהבעיה אינה ניתנת לפתרון.
<u>הדרכה</u>: נסמן את הלוחית הריקה ב-0, כך שמיקום הלוחיות הוא תמורה ב-$S_{\{0,1,...,15\}}=S_{16}$. נסמן ב-$\chi\left(\sigma\right)$ את הערך $(-1)^{i+j}$ כאשר σ ממקמת את המשבצת הריקה במקום ה-$\left(i,j\right)$. הראו ש-$sign\left(\sigma\right)\chi\left(\sigma\right)$ אינו משתנה במהלך המשחק.
פתרון:

נניח שאנו במצב נתון המיוצג ע"י התמורה τ וכעת ביצענו צעד חוקי אחד ועברנו למצב המיוצג ע"י התמורה π. מה היחס בין $sign\left(\tau\right)$ לבין $sign\left(\pi\right)$? כשאנו מזיזים משבצת למשבצת הריקה בעצם אנו שומרים על כל המקומות כמקודם פרט למשבצת אחת שמחליפה מקום עם המשבצת הריקה כלומר $\pi=\tau(i_1\,i_2)$ כאשר $i_1=\tau(0),i_2=\pi(0)$. מכפליות הסימן נקבל ש
$sign\left(\pi\right)=sign(\tau)sign((i_1\,i_2))=sign(\tau)\cdot(-1)=-sign(\tau)$.

מה היחס בין $\chi\left(\tau\right)$ לבין $\chi\left(\pi\right)$? יתכנו שתי אפשרויות: או שמיקום העמודה של הלוחית הריקה נשאר קבוע ומיקום השורה של הלוחית הריקה עלה/ירד בערך 1.

או שמיקום השורה נשאר קבוע ומיקום העמודה עלה/ירד ב1. בכל מקרה קל לראות ש $\chi\left(\pi\right)=-\chi\left(\tau\right)$. בסה"כ נקבל ש $sign\left(\pi\right)\chi\left(\pi\right)=sign\left(\tau\right)\chi\left(\tau\right)$. מכאן - $sign\left(\sigma\right)\chi\left(\sigma\right)$ אינו משתנה במהלך המשחק. כעת שימו לב שאם σ מייצגת את תמורת הזהות, כלומר כל המשבצות בלוח מסודרות במקומן, אז $sign\left(\sigma\right)\chi\left(\sigma\right)=1$. מצד שני אם σ מייצגת את הסידור שבו כל המשבצות במקומן פרט ל לוחיות 14 ו-15 המוחלפות זו עם זו אז $\sigma=\left(14\,15\right)$ ומתקיים $sign\left(\sigma\right)\chi\left(\sigma\right)=-1$ (בדקו!). מכיון שהוכחנו שהגודל הנ"ל לא יכול להשתנות נקבל שלבעיה אין פתרון.