הרצאה II:

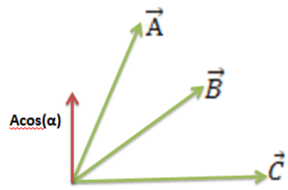
<u>תכונות של המכפלה הוקטורית</u>: חוק הפילוג הוא ההנחה שמאפשרת לחשב את המכפלה הווקטורית לפי רכיבים.

$\vec{A}\times\vec{B} = (A_X\hat{X}+A_Y\hat{Y}+A_Z\hat{Z})\times(B_X\hat{X}+B_Y\hat{Y}+B_Z\hat{Z}) = \cdots = (A_YB_Z-A_ZB_Y)\hat{X}+(A_ZB_X-A_XB_Z)\hat{Y}+$ $(A_XB_Y-A_YB_X)\hat{Z}$. וקיבלנו נוסחא לחישוב לגודל התוצאה של המכפלה ע״י הרכיבים של כל אחד מהם.

טריק לזכור את הנוסחא: $\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{pmatrix}$. נבצע למטריצה דטרמיננטה, ונקבל את הנוסחא מלמעלה.

במילים אחרות: $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$. המכפלה הוקטורית מייצגת את השטח של המקבילית המוגדרת ע״י שני הוקטורים.

<u>טענה חשובה</u>: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$. אפשר להוכיח זאת ע״י רכיבים. או בדרך גיאומטרית כדלהלן:



כל אחד מהביטויים בטענה מסמלים את אותו הנפח של המקבילון הנפרש ע״י שלושת הוקטורים. הגובה הינו $Acos$, וע״פ הגדרת כל אחת מהמכפלות נקבל את הדרוש. ההוכחה האלגברית טכנית לחלוטין, וניתן להוכיחה כתרגיל בית. הרבה מהחלקים מתאפסים מאחר והם מאונכים זה לזה..

<u>קינמטיקה</u>:

תחום שבו חוקרים תנועה בלי להתעסק בסיבותיה. נתחיל מתנועה חד ממדית. הגודל הכי חשוב בקינמטיקה הוא ההעתק, נסמן אותו כ$x(t)$. קצב השינוי בהעתק נקרא מהירות, או מהירות ממוצעת שמוגדרת ע״י $V_{Average} = \frac{X_{t(f)}-X_{t_0}}{t_f-t_0}$. אין היא שימושית כל כך בחיים האמיתיים פרט למקרים בה המהירות קבועה. נגדיר כעת מהירות רגעית עבור פרק זמן $(t, t+\epsilon)$ ונקבל את הגדרת המהירות הרגעית בעזרת גבול: $V(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon}$. נבדוק עבור מקרה של תנועה שוות תאוצה. נקבל כי עבור כל זמן ההעתק הוא $x(t) = \frac{1}{2}at^2, x(t+\epsilon) = \frac{1}{2}a(t+\epsilon)^2$, נציב בנוסחא ונקבל: $V(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{1}{2}a(t+\epsilon)^2-\frac{1}{2}at^2}{\epsilon} = at$ לא במפתיע. ניתן לסמן גם $V(t) \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$. המסלול של הנסיעה הוא משעמם למדי, קו ישר בלי שום סטיות בין הנקודות. בגרף של העתק כפונקציה של זמן, השיפוע מייצג את המהירות (אם הגרף קבוע) ואם לא אז הוא מייצג את המהירות הממוצעת.

<u>נזכר בכללי הנגזרות</u>:

פונקציה	נגזרת	נגזרת שניה -תאוצה
X(t)=c	$\dot{x}(t) = 0$.	0
X(t)=ct+d	$\dot{x}(t) = c$.	0
X(t)=0.5at^2	$\dot{x}(t) = at$.	A
X(t)=t^n	$\dot{x}(t) = nx^{n-1}$.	n(n-1)t^{n-2}
X(t)=e^t	X(t)=e^t	e^t
X(t)=cos(t)	X(t)=-sin(t)	-cos(t)
X(t)=sin(t)	X(t)=cos(t)	-sin(t)

וכל הכללים שלמדנו בתיכון תקפים גם פה..

כל הנוסחאות נובעות מהגדרת הנגזרת ע״י גבול.

דוגמה: $x(t) = t^n = t\cdot t^{n-1}$ וע״פ כלל המכפלה בנגזרות נקבל: $\dot{x}(t) = 1\cdot t^{n-1} + t\cdot(n-1)\cdot t^{n-2} = n\cdot t^{n-1}$.

דוגמה: $x(t) = e^{-3t}$ וע״פ כלל השרשרת נקבל כי הנגזרת היא $\dot{x}(t) = -3e^{-3t}$.

דוגמה: $x(t) = \cos(at^2)$ ונקבל $\dot{x}(t) = -\sin(at^2)\cdot 2at$.

(דוגמה 1 מטרתה להראות שימוש בכלל המכפלה, מטרת דוגמה 2 ו3 הם שימוש בכלל השרשרת)

הנגזרת של ההעתק זה מהירות, ושל המהירות זה תאוצה. $a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.