נכתב על ידי נועם יערי

טענה

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה חסומה מלעיל, אזי היא מתכנסת והגבול הינו החסם העליון $\sup\{a_n\}$. גם כן, כל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלרע מתכנסת, הגבול הינו $\inf\{a_n\}$

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$. נניח כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה (ההוכחה במקרה ההפוך דומה) לפי תכונות החסם העילון, קיים N כך ש :

$$a_N > \sup\{a_n:, \geq 1\} - \epsilon$$

אז לכל $n \geq N$, מתקיים $a_N \leq a_n \leq_{\text{הסדרה עולה}} \sup\{a_n\}_{\text{חסם מלעיל}}$

קיבלנו שלכל $n \geq N$ מתקיים $0 \leq \sup\{a_n: n \geq 1\} - a_n < \epsilon$

$$|a_n - \sup\{a_n: n \geq 1\}|\epsilon$$

אז לפי הגדרת הגבול, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אכן מתכנסת וכי $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{\mathrm{a_n}: \mathrm{n} \geq 1\}$

דוגמה

סדרה הנדסית. יהי $0 < q < 1$, נגדיר $a_n = q^n$:

$$q, q^2, \dots$$

טענה

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

הוכחה : לכל $n \geq 1$, רואים כי $q < 1$,

$$a_{n+1} = q^{n+1} = q^n \cdot q < 1 \cdot q^n = q^n = a_n$$

לכן הסדרה יורדת. כיוון שלכל q^n הינו חיובי, 0 הינו חסם מלרע. לכן הסדרה מתכנסת לפי הטענה הקודמת, ובנוסף

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_{\mathrm{n}}: \mathrm{n} \geq 1\}$$

נסמן $L = \inf\{a_{\mathrm{n}}: \mathrm{n} \geq 1\}$. ידוע כי $L \geq 0$.

נניח בשלילה כי $L > 0$ אזי $L > \frac{L}{q}$. אבל, לפי תכונות החסם התחתון, קיים n כך ש $q^n = \frac{L}{q}$ כי $\frac{L}{\mathrm{q}}$ אינו חסם מלרע כי הוא גבול מ- $\inf\{a_n\}$

נכפיל ב-q :

$$q^{n+1} < \frac{L}{q} \cdot q$$

$$q^{n+1} < L = \inf\{q^n: n \geq 1\}$$

זה לא יתכן. לכן $L > 0$ לא נכון, ובהכרח $L = 0$.

טענה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אזי $a_n \to 0$ אם ורק אם $|a_n| \to 0$.

הוכחה

$\leftarrow$
נניח כי $a_n > 0$. זה אומר שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$
$|a_n| < \varepsilon$

קיבלנו שלכל $n \geq N$

$$||a_n| - 0| < \varepsilon$$

זה בדיוק אומר כי $|a_n| \to 0$
לכיוון ההפוך הופכים את ההוכחה.

תוצאה
יהי $-1 < q < 0$ אזי הסדרה ההנדסית $q^n \to 0$

אם $q = -0.5$ אזי מדובר בסדרה .. $-0.5, 0.25, -0.125,$ אכן , אם $a_n = q^n$ אזי $|a_n| = |q|^n$
אבל $0 < |q| < 1$ ולכן כבר ידוע כי $|q|^n \to 0$.

דוג'
יהי $c > 0$. נגדיר סדרה באופן רקורסיבי : $a_1 = 1$

לכל $n \geq 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ האם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ואם כן, מהו הגבול? נוכיח באינדוקציה שהסדרה עולה.
אכן : $a_2 = \sqrt{c+1}$

$$a_3 = \sqrt{\left(c + \sqrt{c+1}\right)}$$

רוצים להוכיח שלכל $n \geq 1$, $a_{n+1} > a_n$

$$n = 1:$$

$$a_2 = \sqrt{c+1} > 1 = a_1$$

נניח שידוע $a_n > a_{n-1}$

$$a_{n+c} > a_{n-1} + c$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} > \sqrt{a_{n-1} + c} = a_n$$

אז הסדרה עולה באינדוקציה.
זה אומר שהיא מתכנסת אם ורק אם היא חסומה מלעיל. לא ברור מהו חסם מלעיל מתאים. אז נניח שהסדרה חסומה מלעיל ונראה מה נקבל. זה אומר שהסדרה מתכנסת, כי היא סדרה עולה חסומה מלעיל. יהי L הגבול.

לכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1}^2 = a_n + c$$

לפי : $\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = L + c$

נכתב על ידי נועם יערי

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

(כי מניחים שa_n מתכנסת.) מצד שני, $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\mathrm{L}$ (כי זה אומר סדרה כמו a_n, עם מספור שונה של האיברים.)

הוכחנו שאם שתי סדרות $\{a_n\},\{b_n\}$ מתכנסות אזי

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$ בפרט,

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2=L^2$ אבל ידוע כי $a_{n+1}^2=a_n+c$ לכל n. ניקח גבולות של שני האגפים :

$$L^2=L+c$$

$$L^2-L-c=0$$

$\mathrm{L}=\frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$ אבל $L=\sup\{a_n\}$ בפרט, $L\geq a_1=1$ לכן צריך לקחת סימן +. לכן $L=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. כרגע ידוע לנו שאם הסדרה מתכנסת, אזי הגבול הוא בהכרח הינו L. אבל אנחנו לא יודעים שהיא מתכנסת!

אם הסדרה מתכנסת, אזי L הינו בהכרח החסם העליון שלה. נוכיח באינדוקציה כי אכן $a_n\leq L$ לכל $n\geq 1$.

$n=1:$

$$a_1=1\leq\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}=\mathrm{L}$$

נניח שידוע כי $a_n\leq L$. $a_n+c\leq L+c=L^2$.

$$a_n+c\ \leq L+c=L^2$$

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}\leq\sqrt{L^2}=L$$

הוכחנו שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל. כיוון שהיא עולה, היא מתכנסת. לפי ההישג הקודם שלנו, אם היא מתכנסת, הגבול הינו L. אז הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty}a_n=L=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

אבחנה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. יהי L הגבול. אם $L\neq 0$, אזי קיים N כך שלכל $n\geq N$, $a_n\neq 0$

הוכחה

ניקח $\varepsilon=\frac{|L|}{2}>0$ אזי לפי ההגדרה של גבול קיים N כך שלכל $n\geq N$, $|a_n-L|<\frac{|l|}{2}$ זה בפרט אומר שלכל $n\geq N$, $a_n\neq 0$, שהרי $|0-L|=|L|>\frac{|L|}{2}$

----0---($_{L-\epsilon}$----|$_{L}$-------)$_{L+\epsilon}$ ---

נכתב על ידי נועם יערי

טענה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. יהי L הגבול ונניח כי $L \neq 0$. אזי הסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ גם מתכנסת וגם $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$

(בגלל האבחנה הנ״ל ניתן לזרוק מספר סופי של איברים מתחילת הסדרה a_n ולהניח בהג״כ כי $a_n \neq 0$ לכל n ואז מותר לדבר על $\frac{1}{a_n}$.)

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$. יהי $\epsilon' = \min\{\frac{|L|}{2}, \frac{\epsilon L^2}{2}\}$. לפי הגדרת הגבול, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon'$.

בפרט, $|a_n - L| < \epsilon' \leq \frac{|L|}{2}$. לכן, לכל $n \geq N$

$$L - \frac{|L|}{2} < a_n < L + \frac{|L|}{2}$$

אם $L > 0$ אזי $\frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}$.

בכל מקרה, $|a_n| > \frac{|L|}{2}$. לכן, $\frac{1}{a_n} < \frac{2}{|L|}$ לכל $n \geq N$.

אזי לכל $n \geq N$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - a_n}{a_n L}\right| = |a_n - L| \cdot \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|L|} < \epsilon' \cdot \frac{2}{|L|} \cdot \frac{1}{|L|} \leq \frac{\epsilon L^2}{2} \cdot \frac{2}{L^2} = \epsilon$$

קיבלנו שלכל $n \geq N$, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon$ לפי הגדרת הגבול.