מבחן + פתרון גיאומטריה
קיץ 78
מועד א'

גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית 88-201
מבחן מועד א' סמסטר קיץ תשע"ח
מרצה: שי גול, מתרגלת: ניקול בלשוב

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון אך לא כולל קבצים דיגיטליים).
ענו על כל השאלות. במבחן 105 נקודות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות

1. (א) (10 נקודות) הראו שכל עקומה רגולרית המתחילה בנקודה $a = (-1,0,0)$ ומסתיימת בנקודה $b = (1,0,0)$ שנמצאת ב $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \times 0$ יש אורך ≤ 2.

   (ב) (10 נקודות) הוכיחו שאם פונקצית הפיתול של עקומה היא קבועה ושווה לאפס אז העקומה נמצאת במישור.

2. (40 נקודות)נתון המשטח על ידי הפרמטריזציה הבאה:

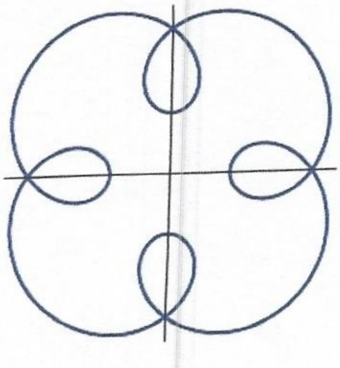
$$x(u,v) = \begin{pmatrix} 3 - \frac{u}{3}\cos v \\ 3 - \frac{u}{3}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

   (א) חשבו את התבנית היסודית הראשונה
   (ב) חשבו שטח המשטח
   (ג) חשבו את התבנית היסודית השניה
   (ד) מצאו את ערכי העקמומיות הראשיים
   (ה) מצאו את עקמומיות גאוס
   (ו) מצאו את העקמומיות הממוצעת
   (ז) מצאו את מקדמי כריסטופל
   (ח) מצאו את משוואת הקו הגאודזי

3. נתונה ההצגה הפרמטרית $\gamma(t) = (2cos(t) - cos(5t), 2sin(t) - sin(5t))$ (איור 0.1), נגד כיוון השעון.

   (א) (9 נקודות) בהתבסס על האיור, כמה קודקודים יש לתחום הנתון, נמק.

   (ב) (9 נקודות) קבעו את העקמומיות לשלושת הקודקודים הראשונים (מציר ה x החיובי נגד כיוון השעון).



איור 0.1:

איור 0.2:

(ג) (9 נקודות) חשבו את העקמומיות הכוללת של עקומה זו.

4. נתון המשטח באיור 0.2 (שמזכיר מאוד חולצה)

(א) (9 נקודות) קבעו את המאפיין אויילר של משטח זה

(ב) (9 נקודות)חשבו את עקמומיות גאוס הממוצעת של משטח זה , הנח ששטח הפנים שלו הוא 10 ושכל העקומות על השפה הם גיאודזיות.

בהצלחה!

① פתרון מועד ג' } גאומטריה 18

① (א) הוכח שכל עקומה רגולרית המתחילה בנקודה $a=(-1,0,0)$ ומסתיימת בנקודה $b=(1,0,0)$ שנמצאת ב- $R^2\setminus\{0,0\}\setminus\{0\}$ יש אורך ≥ 2

פתרון:

נשתמש בקושי-שוורץ: כל אורך זה

$$L=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \geq \|(b-a)\|\,\|\gamma'(t)\|$$

$$=\|(b-a)\|\cdot 1 = 2$$

כנדרש!

① (ב) טעות בהרצאה!!

אם $\tau=0$ אז מ-פרנה נקבל $\hat{B}'=0$

$f(s)=\langle\gamma(s)-\gamma(0),\hat{B}(s)\rangle$

נגדיר פונקציה זו, נגזור:

$-\gamma'(0)$ $+\langle\hat{B}',\gamma(s)-\gamma(0)\rangle$

$$f'(s)=\langle\gamma'(s),\hat{B}\rangle=\langle\hat{T},\hat{B}\rangle=0$$

ולכן, $f(s)=c$

כמו כן $f(0)=0$ ולכן $f(s)\equiv 0$

$$0=f(s)=\langle\gamma(s)-\gamma(0),\hat{B}\rangle=$$

$$\langle\alpha(s),\hat{B}\rangle-\langle\alpha(0),\hat{B}\rangle$$

$\Downarrow$

שאלה 2:

א

$$x(u,v)=\begin{pmatrix} 3-\frac{u}{3}\cos v \\ 3-\frac{u}{3}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$x'_u=\left(-\frac{1}{3}\cos v,\ -\frac{1}{3}\sin v,\ 1\right)$$

$$x'_v=\left(\frac{u}{3}\sin v,\ -\frac{u}{3}\cos v,\ 0\right)$$

$$\langle x'_u, x'_u\rangle = \frac{1}{9}+1=\frac{10}{9}$$

$$\langle x'_v, x'_v\rangle = \frac{u^2}{9}$$

$$\langle x'_u, x'_v\rangle = 0$$

$$G=\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{9} \end{pmatrix}$$ ולכן

ב) נחשב את שטח המעטפת

$$|G|=\frac{10}{81}u^2$$

$$\iint_D \sqrt{|G|}\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{\sqrt{10}\,|u|}{9}\,du\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{\sqrt{10}\,u}{9}\,du\,dv=\cancel{2}\pi\,\frac{\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{r^2}{\cancel{2}}=\frac{\pi\sqrt{10}\cdot r^2}{9}$$

$$X''_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$X''_{vv} = \left(\frac{u}{3}\cos v, \frac{u}{3}\sin v, 0\right)$$

$$X''_{uv} = \left(\frac{1}{3}\sin v, -\frac{1}{3}\cos v, 0\right)$$

נחשב נורמל היחידה!

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|}$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{3}\cos v & -\frac{1}{3}\sin v & 1 \\ \frac{u}{3}\sin v & -\frac{u}{3}\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{u}{3}\cos v\right) + j\,\frac{u}{3}\sin v - k\cdot\left(\frac{u}{9}\cos^2 v + \frac{u}{9}\sin^2 v\right)$$

$$= \left(\frac{u}{3}\cos v, \frac{u}{3}\sin v, \frac{u}{9}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\| X_u \times X_v \| = \sqrt{\frac{u^2}{9} + \frac{u^2}{81}} =$$

$$\vec{n} = \frac{u^2}{}$$

$$= \sqrt{\frac{10u^2}{81}} = \frac{\sqrt{10}\,u}{9}$$

ולכן מכאן יהיה הנורמל הוא

$$\vec{n} = \frac{9}{\sqrt{10}\,\cancel{u}}\left(\frac{\cancel{u}}{3}\cos v, \frac{\cancel{u}}{3}\sin v, \frac{\cancel{u}}{9}\right) =$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\cos v, 3\sin v, 1)$$

(4)

עכשיו נחשב את המטריצה השנייה

$$\langle \hat{n}, x''_{uu} \rangle = 0$$

$$\langle \hat{n}, x''_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{u}{\cancel{3}}\cos v \cdot \cancel{3}\cos v + \frac{u}{\cancel{3}}\sin v \cdot \cancel{3}\sin v \pm 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot u$$

$$\langle \hat{n}, x''_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\cos v \sin v - \cos v \sin v + 0\right) = 0$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא!

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}u \end{pmatrix}$$

שלב 3 נמצא ערכי העקמומיות הראשיות.
לכן נמצא את אופרטור הצורה

$$S = G^{-1}B = \left(\frac{10}{81}u^2\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{u^2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{10}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}u \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{9}{16} \quad 0\right)$$

$$= \frac{\cancel{81}^{9}}{\cancel{16}} \cdot \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cancel{10}}{\cancel{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{\sqrt{10}}u \end{pmatrix}$$

ולכן ערכי העקמומיות

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{9}{\sqrt{10}}u$$

סעיף ה'

עקמומית גאוס

$$K = k_1 \cdot k_2 = 0$$

סעיף ו'

עקמומית ממוצעת

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{9}{2\sqrt{10}\cdot 4}$$

סעיף ז'

סמלי כריסטופל

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km} \left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m} \right)$$

מצאנו ? g^{-1}

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 9/4^2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{g^{-1}_{11} = (}$$

נסמן

$$g_{11} = \frac{10}{9} \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad g_{22} = \frac{4^2}{9}$$

$$g^{11} = \frac{9}{10} \quad g^{12} = g^{21} = 0 \quad g^{22} = \frac{9}{4^2}$$

נקבל

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g^{1m} \left(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m} \right) = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{2m} \left(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m} \right) = 0$$

באופן דומה [illegible] ?

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{4} \quad \Gamma_{22}^{1} = -\frac{4}{10}$$

סעיף ד

מציאת המשוואות דרך הגאודזים.

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$$

יש לנו שני אלה

$$k=1: \ddot{\gamma}^1 + \Gamma_{11}^1 (\dot{\gamma}^1)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{\gamma}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 + \Gamma_{22}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \dot{\gamma}^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\gamma}^1 - \frac{4}{10}(\dot{\gamma}^2)^2 = 0$$

באופן דומה עבור $k=2$

$$\ddot{\gamma}^2 + \frac{2}{4}\dot{\gamma}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 = 0$$

ולכן המשוואות הן

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^1 - \frac{4}{10}(\dot{\gamma}^2)^2 = 0 \\ \ddot{\gamma}^2 + \frac{2}{4}\dot{\gamma}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 = 0 \end{cases}$$

u , v

נסמן u ; v

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{4}{10}\dot{v}^2 = 0 \\ \ddot{v} + \frac{2}{4}\dot{u}\dot{v} = 0 \end{cases}$$

עבור משוואה (2)

$$\frac{\ddot{v}}{\dot{v}} = -2\frac{\dot{u}}{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{v} = \frac{c}{u^2}$$

$$\ddot{u} - \frac{4}{10}\left(\frac{c}{u^2}\right)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{u} = \frac{c^2}{10}$$

פתרון שאלה 3

א) נמאיר ניתאין 8 קודקודים

ב)

המעגל הדרוש

$\gamma(0) = (1,0)$

$\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi \cdot 5}{4}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -$

נמצא את העקמומיות

$\gamma'(t) = (-2\sin t + 5\sin(5t),\ 2\cos(t) - 5\cos(5t))$

$\gamma''(t) = (-2\cos t + 25\cos(5t),\ -2\sin(t) + 25\sin(5t))$

$k = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} \quad \frac{\gamma''(0)}{\gamma'(0)} = \frac{\|(23,0)\|}{\|(0,-3)\|^2} = \frac{23}{9}$

ולכן

$k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{27}{49}$

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{23}{49}$

האינדקס של העקומה 5

ולכן $(2\pi \cdot 5)$

$\int_\gamma k\, ds = 10\pi \overset{\text{ולכן}}{=}$

∴ אפיין אוילר χ

לפי משפט גאוס בונה

$$\iint_A K\,dA + \int k_g\,ds = 2\pi\chi$$

למשטח יש ארבע [illegible] לכן אפיין אוילר

$$2-1-1-1=-2$$

לכן

$$\iint_A K\,dA = -4\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{K} = \frac{1}{10}\iint K\,dA = -\frac{2\pi}{5}$$