06/07/17

מועד א' – חדו"א 2 למורים

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א. $\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$$\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left\{\begin{matrix} f' = 1 & g = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ f = x & g' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{matrix}\right\} = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

ב. $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)} dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)} dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)\, dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t+1+(1-t^2)} dt = -\int \frac{1}{t^2-t-2} dt =$$

$$= -\int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dt = -\int \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\ln|t+1| - \ln|t-2|\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|\sin(x)+1| - \ln|\sin(x)-2|\right] + C$$

ג. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

אנכיות:

נקודות חשודות – נקודות אי רציפות, במקרה זה אפס.

$$\lim_{x\to 0} x\,e^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}0 & x<0\\ \infty & x>0\end{cases}$$

נחשב את הגבול מימין בצד:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,e^{\frac{1}{x}}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$$

לכן יש אסימפטוטה $x=0$ מימין

כעת נעבור למשופעות:

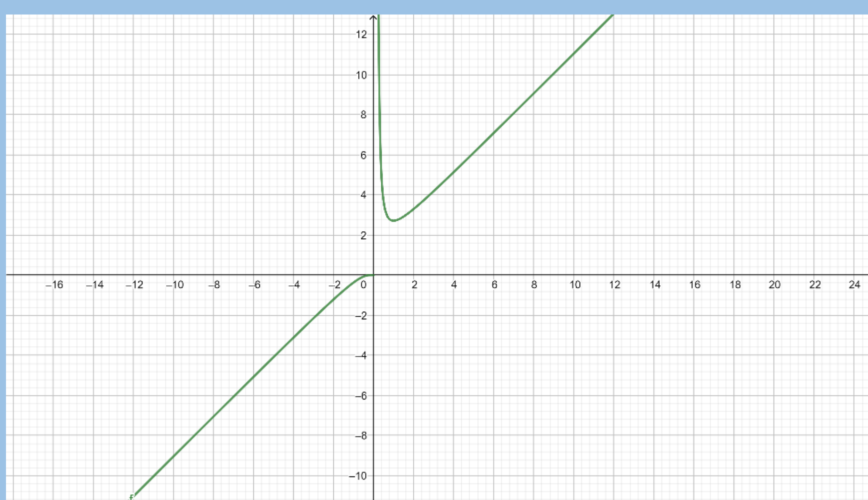
נתחיל מימין:

$$\mathrm{a}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0},L'Hopital=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$$

לכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

באופן דומה, זו אסימפטוטה משופעת גם משמאל (רצוי להוכיח בעצמכם ולא לרשום באופן דומה).



ד. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty}\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}dx$

.2

א. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} e^{\left(-t^2\right)}dt}{e^x-1}$

$$\left(\int_h^g f(t)dt\right)' = \left(F(g)-F(h)\right)' = f(g)\cdot g' - f(h)\cdot h'$$

0 חלקי 0, נעשה לופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}\cdot 1 - e^{-(-x)^2}\cdot(-1)}{e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}}{e^x} = 2$$

ב. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}$

ננסה להציג את הביטוי כסכום רימן, כי למדנו ש

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)dx$$

עבור f הרציפה בקטע $[0,1]$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{k+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\frac{k}{n}+1} = n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \infty\cdot\ln(2) = \infty$$

הסבר לגבי המעבר האחרון

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{k}{n}+1} \to \int_0^1\frac{1}{x+1}dx = [\ln|x+1|]_0^1 = \ln(2)$$

.3

א.   קרבו את $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

ראשית, נביט בטור הטיילור של sin

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$$

נעשה אינטגרל

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots$$

כאשר יש לנו טור עם סימנים מתחלפים וגודל האיברים יורד ושואף לאפס זה נקרא טור לייבניץ.

על מנת לקרב אותו – לוקחים את סכום האיברים הראשונים עד ולא כולל הראשון שקטן מהשגיאה.

לכן הקירוב הוא

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!}$$

ב. חשבו את $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n n!}$

ראשית

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

כעת הטור השמאלי הוא הטור ההנדסי כאשר מציבים בו $x=\frac{1}{2}$, ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

באופן דומה נציב $x=\frac{1}{2}$ בטור של e^x ונקבל

$$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

ולכן סה"כ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n\cdot n!}=2-\sqrt{e}$$

4. תהיינה f,g פונקציות חיוביות כך ש $\frac{f'g-g'f}{g^2}\le 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$

א. הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^\infty f$ מתכנס אז גם $\int_0^\infty g$ מתכנס.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^\infty g$ מתכנס אז גם $\int_0^\infty f$ מתכנס.

טורי חזקות ידועים: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\quad\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$