תרגול 2-אושרית

אינדוקציה מתמטית, קבוצות, פעולות על קבוצות ואיחודים וחיתוכים כלליים

1

תרגול - אינדוקציה:

מתמטיקה בדידה

בכדי להוכיח שטענה כלשהי, שסומנה $P(n)$, נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$, נפעל עפ"י השלבים הבאים:

מבנה כללי:

1. בסיס האינדוקציה: נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=1$. כלומר $P(1)$ - אמת.
2. הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור ערך טבעי מסויים n. כלומר - $P(n)$ נכון.
3. שלב האינדוקציה: נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $n+1$. כלומר - צ"ל: $P(n)\rightarrow P(n+1)$

2+3 נקרא - צעד האינדוקציה

קצת אינטואיציה: הוכחנו ידנית שהטענה נכונה עבור $n=1$ כלומר $P(1)$ מתקיים. לכן בצעד האינדוקציה נקבל ש-$P(2)$ מתקיים ונפעיל שוב את צעד האינדוקציה הפעם על $n=2$ ונקבל $P(3)$ מתקיים! וכן הלאה...

דוג' לתרגיל:

נוכיח באינדוקציה כי $(1+2+\dots+n)^2=1^3+2^3+\dots+n^3$

הוכחה:

בסיס האינדוקציה: נראה כי מתקיים עבור $n=1$.

אגף שמאל $1^2=1$ אגף ימין $1^3=1$ $\Big\} \Rightarrow$ אכן - מתקיים ✓.

~~צעד~~ הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו כלומר $(1+2+\dots+n)^2=1^3+2^3+\dots+n^3$

צעד האינדוקציה: נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+1$.

כלומר - צ"ל: $(1+2+\dots+n+n+1)^2=1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3$

נפתח את אגף שמאל ←

$$(1+2+\dots+n+n+1)^2=\big((1+\dots+n)+(n+1)\big)^2=(1+\dots+n)^2+2(1+\dots+n)(n+1)+(n+1)^2=$$

לפי נוסחה (כפל מקוצר) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$a=1+\dots+n$

$b=n+1$

$$=1^3+\dots+n^3+2\cdot(n+1)\underbrace{(1+\dots+n)}_{\text{סכום סדרה חשבונית}}+(n+1)^2=1^3+\dots+n^3+\frac{\cancel{2}(n+1)(n+1)\cdot n}{\cancel{2}}+(n+1)^2=$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$=1^2+\dots+n^3+n(n+1)^2+(n+1)^2=1^3+\dots+n^3+(n+1)^2(n+1)=1^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$

מש"ל

הכללה פשוטה 1: הוספה של הטענה הראשונה ⇐ כלומר לשנות את בסיס האינדוקציה מ- $n=1$.
בסיס האינדוקטיבי: הטענה מתקיימת עבור $n=k$ מסויים, כלומר $P(k)$ מתקיים.
המשך כרגיל ⇐ כלומר צעד האינדוקציה ללא שינוי.

אגף: ימין

דוג׳:

הוכח כי לכל $x>0$ מתקיים $(1+x)^n > 1+nx$ לכל $n \ge 2$.

אגף ימין $1+2x$ אגף שמאל $(1+x)^2 = x^2+2x+1$

פתרון: **בסיס האינדוקציה:** נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n=2$ כי $x>0$

דבר שמתקיים $x^2+2x+1 > 1+2x$ ✓.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו ונרצה להראות כי הטענה נכונה עבור $n+1$.

כלומר - מתקיים ♡ $(1+x)^n > 1+nx$ צ״ל: $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$

נכפול את ♡ ב-$(1+x)$ ללא שינוי סימן האי שוויון מפני ש- $1+x>1$ ⇐ $x>0$ ונקבל -

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) \underset{\text{פתיחת סוגריים}}{=} 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$$ כי $x>0$

מש״ל

הכללה ב:

בסיס האינדוקציה: ללא שינוי (הערה - אפשר ג' שישתנה לפי המקרה הקודם..) כלומר - $P(1)$ מתקיים.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור כל המס' עד מס' טבעי מסוים n כלומר לכל $1\le m\le n$ $P(m)$ מתקיים. ונרצה להוכיח כי $P(n+1)$ מתקיים.

סוג זה של אינדוקציה נקרא -אינדוקציה שלמה.

דוג': כל מס' טבעי $n>1$ ניתן להציג כמכפלה של מס' ראשוניים.

פתרון: **בסיס האינדוקציה:** נניח כי הטענה נכונה עבור $n=2$. ברור 2 הוא מס' ראשוני; 2- הוא פירוק של עצמו.

צעד האינדוקציה: כמו- נניח שהטענה נכונה לכל $1<k\le n$ ונוכיח עבור $n+1$.

חלק למקרים: (1) אם $n+1$ ראשוני - סיימנו כי הוא-פירוק של עצמו. ✓

(2) אחרת- $n+1$ מתפרק למכפלה כלשהי. $n+1=a\cdot b$ כאשר $1<a,b<n+1$

ולכן-מתקיים את הנחת האינדוקציה. לכן- a מתפרק למכפלה של גורמים ראשוניים.

$a=\prod_{i=1}^{t} p_i$ כאשר p_i ראשוניים, $b=\prod_{k=1}^{l} q_k$ כאשר q_k ראשוניים

$\Leftarrow$ $n+1=a\cdot b=\prod_{i=1}^{t}p_i\cdot\prod_{k=1}^{l}q_k$ וניתן להציגו כמכפלת גורמים ראשוניים.

מש"ל

הערה: לפעמים בהוכחה באינדוקציה נצטרך לנסח טענה חזקה יותר להוכחה אותה נוכיח בעזרת אינדוקציה

דוג׳: נגדיר - $a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{4}$, $a_0=0$ הוכח - כי לכל n מתקיים $a_n<1$.

פתרון: נוכיח משהו יותר חזק. לכל n מתקיים $a_n<\frac{1}{2}$

בסיס האינדוקציה: נראה כי הטענה נכונה עבור $n=0$ $a_0=0<\frac{1}{2}$ ✓

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור n כלומר $a_n<\frac{1}{2}$ ונרצה להוכיח ש הטענה נכונה גם עבור a_{n+1}

$a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{4}\underset{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}{<}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ✓ ולכן - מתקיים.

מ.ש.ל

הג' קבוצה: אוסף של איברים, נהוג לסמן קב' באות אנגלית גדולה.

נסיון ♡ כי - הג' זו של קב' יכולה לגרור סתירות לוגיות.

הג': פרדוקס ראסל: נגדיר את הקב' הבאה ← $X =$ אוסף כל הקב' שלא שייכות לעצמן.

כעת - השאלה היא מה קורה עם הקב' X?

① או $X \in X$ ← סתירה. כי X מכילה רק קב' שלא שייכות לעצמן.

② או $X \notin X$ ← סתירה. כי X מכילה את כל הקב' שלא שייכות לעצמן. X מקיימת את התנאי של הקב' X ולכן - נקבל $X \in X$ וסתירה!

הערה: תורת הקב' האקסיומטית פותרת סתירה זו ע"י כך שלא מאפשרת להגדיר קב' מהסוג של הקב' X הנ"ל.

תכונות של קבוצה: ① כל איברי הקבוצה שונים - כלומר איבר לא יכול להופיע פעמיים. **דוגמה:** $\{2,2\}=\{2\}$ ← אין לזה משמעות

② אין משמעות לסדר האיברים. **דוגמה:** $\{1,2\}=\{2,1\}$

סימון: $\in$ ← איבר נמצא בקבוצה. **דוגמה:** $1\in\{1,2,3\}$; $1\notin\{\{1,2,3\}\}$ ← לא שייך

הגדרת הכלה: נאמר כי קבוצה A **מוכלת** בקבוצה B. **סימון:** $A\subseteq B$, אם כל (האיברים) ב-A הם גם איברים ב-B.

בשפה מתמטית: $A\subseteq B \leftrightarrow \forall a\in A: a\in B$.

דוגמה: ① $\{1\}\subseteq\{1,2\}$ ② על הדרך נלמד את הסימונים של הקבוצה.

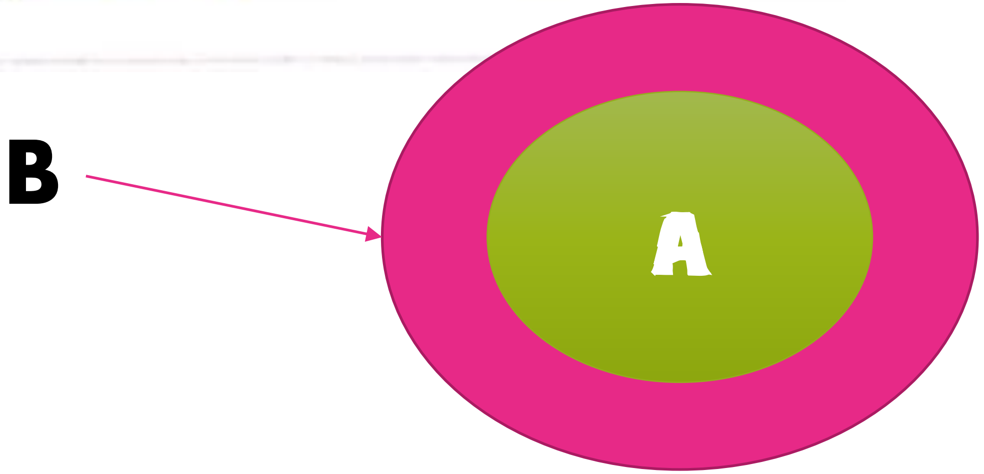
טבעיים, שלמים, רציונליים, ממשיים, מרוכבים

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\},\quad i^2=-1$$

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$; $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{Z}, n\neq0\}$

~~[illegible]~~:

שרטוט להכלת קבוצות:



הגד': קב' ריקה – קב' שלא מכילה איברים. סימונים: $\emptyset$, $\{\}$.

תרגיל: הוכיחו כי $\emptyset$ מוכלת בכל קב' A.

הגד': קב' ריקה - קב' שלא מכילה איברים. סימונים: $\emptyset$, $\{\ \}$

תרגיל: הוכיחו כי $\emptyset$ מוכלת בכל קב' A.

פתרון: יהי $x \in \emptyset$ ונרצה להראות כי $x \in A$. נשים ♡ כי לפנינו טענה שגויה.

שקר, כי קב' ריקה לא מכילה איברים. ראינו כי שקר גורר כל דבר ולכן ניתן לומר כי הטענה נכונה באופן ריק.

$\Leftarrow$ מסקנה חשובה: $\boxed{\emptyset \text{ מוכלת בכל קב'.}}$

תרגיל: מצאו קב' A,B כך ש:

1. $A\subseteq B \wedge A\in B \Leftarrow$

2. $A\subseteq B \wedge A\notin B \Leftarrow$

3. $A\nsubseteq B \wedge A\in B \Leftarrow$

תרגיל: מצאו קב' A,B כך ש:

① $A\subseteq B \wedge A\in B$ ⟵ **פתרון:** נבחר $\boxed{A=\emptyset}$ מהרכי - $\emptyset\subseteq B$ לפי מה שהוכחנו למשפט החשוב

לכן - נותר להראות כי $\emptyset\in B$. איך עושים זאת? נגדיר את $\emptyset$ להיות איבר

של קב' B. כלומר $\boxed{B=\{\ \emptyset\ \}}$ ואפשר להוסיף עוד איברים אבל-לא חובה.

② $A\subseteq B \wedge A\notin B$ ⟵ **פתרון:** נבחר $\boxed{A=\emptyset}$ וברור כי מתקיים $\emptyset\subseteq B$. הפעם נבחר קב' B כך ש-$\emptyset$

לא איבר שלה. לדוג': $\boxed{B=\{1\}}$ ואכן-מתקיים $\emptyset\notin\{1\}$.

③ $A\nsubseteq B \wedge A\in B$ ⟵ **פתרון:** נבחר $\boxed{A=\{1\}}$ $\boxed{B=\{\{1\}\}}$ כלומר אנחנו רוצים כי הקב' A

תהיה איבר ב- B. אבל שהאיברים של A לא יהיו איברים ב-B.

שיטה להוכחת שוויון קב׳: הכלה דו כיוונית.

כלומר $A=B \leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$.

תרגיל: נתונות הקב׳ הבאות: $A=\{2m+1 : m\in \mathbb{Z}\}$ $B=\{2m+3 : m\in \mathbb{Z}\}$ צ"ל: $A=B$.

פתרון: נוכיח הכלה דו כיוונית. (1) ← יהי $x\in A$ ונרצה להראות כי $x\in B$.

לפי הג׳ A $\Downarrow$ לפי הג׳ B $\Leftarrow$

קיים $m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $x=2m+1$ כלומר- צ"ל: קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $x=2k+3$.

נפתור את המשוואה ונקבל-
$$\begin{cases} 2m+1=2k+3 \\ 2m-2=2k \quad /:2 \\ m-1=k \end{cases}$$
אז $m\in\mathbb{Z} \Leftarrow m-1\in\mathbb{Z}$ (לפי הג׳ $\mathbb{Z}$), $m-1 = k$

ולכן- $x\in B$.

(2) ← יהי $y\in B$ ונרצה להראות כי $y\in A$.

לפי הג׳ B $\Downarrow$ לפי הג׳ A $\Leftarrow$

קיים $m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $y=2m+3$ כלומר- צ"ל: קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $2k+1=y$.

נפתור את המשוואה ונקבל- $2k+1=2m+3 \Leftarrow 2k=2m+2 \Leftarrow k=m+1$ וידוע כי $m\in\mathbb{Z} \Leftarrow m+1\in\mathbb{Z}$ ($m+1=k$)

ולכן- $y\in A$. מש"ל

פעולות על קבוצות:

1. **פעולת החיתוך:** חיתוך של 2 קבוצות A, B, **מסומן** - $A \cap B$ = אוסף האיברים שנמצאים גם ב-A וגם ב-B. **פורמלית:** $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \land x \in B$

שרטוט:

דוגמה: $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $\Leftarrow$ $A \cap B = \{2\}$.

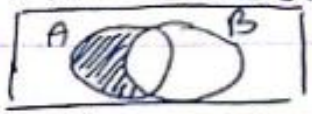
2. **פעולת האיחוד:** איחוד של 2 קבוצות A, B, **מסומן** - $A \cup B$ = אוסף האיברים שנמצאים ב-A או ב-B.

פורמלית: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \lor x \in B$ **שרטוט:**

דוגמה: $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$
$A \cup B = \{1,2,3\}$

3. **פעולת ההפרש:** A הפרש B הקבוצה שמכילה את כל האיברים שב-A ושלא ב-B. **מסומן:** $A \setminus B$.

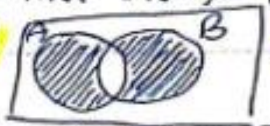
פורמלית: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$ **שרטוט:**



דוגמה: $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $A \setminus B = \{1\}$

4. **הפרש סימטרי:** הפרש סימטרי בין A ל-B - הקבוצה שמכילה את כל האיברים שנמצאים באחת הקבוצות ולא בשתיהן **מסומן** - $A \Delta B$

פורמלית: $x \in A \Delta B \Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \lor (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ **שרטוט:**



דוגמה: $A \Delta B = \{1,3\}$

5. **פעולת המשלים:** תהי קבוצה U קבוצה עולם כלשהי, ונביט בתת קבוצה שלה A. ניתן להגדיר את המשלים של A כאוסף האיברים ב-U שאינם ב-A כלומר ההפרש $U \setminus A$. **מסומן** - A^c.

דוגמה: $U=\{1,2,3\}$
$A=\{1\}$
$\Rightarrow A^c = \{2,3\}$

הערה: לא ניתן לבנות משלים אוניברסלי ללא U כי אין דבר כזה קבוצת כל הקבוצות ← מוביל לפרדוקס ראסל.

תכונות האיחוד והחיתוך:

① אסוציאטיביות: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

② חילוף: $A\cap B=B\cap A$

③ דיסטריביוטיביות (פילוג): I $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ II $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

תרגיל: ① $\emptyset\cap A=\emptyset$ ② $\emptyset\cup A=A$.

הוכחה: ① נוכיח הכלה דו כיוונית $\supseteq$ ← ברור, ראינו כי $\emptyset$ מוכלת בכל קב'.

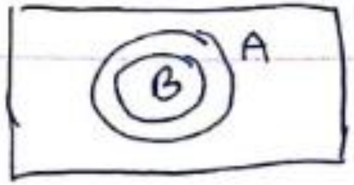
$\subseteq$ ← יהי $x\in\emptyset\cap A$ ונרצה להראות כי $x\in\emptyset$

לפי הג' יחיד

$x\in\emptyset \Leftarrow x\in\emptyset\wedge x\in A$.

② רוצה להוכיח טענה כללית יותר - אם $B\subseteq A$ ← $A\cup B=A$.

שרטוט:



נוכיח הכלה דו כיוונית $\supseteq$ ברור כי $A\subseteq A\cup B$ לפי הג' האיחוד.

$\subseteq$ ← יהי $x\in A\cup B$ ונרצה להראות כי $x\in A$.

לפי הג' האיחוד

$x\in A\vee x\in B$: נחלק למקרים: ① $x\in A$ ← סיימנו ✓.

② $x\in B$

לפי הג' הכלה $B\subseteq A$ ← $x\in B\to x\in A$ וסיימנו ✓.

איך קשור לשאלה שלנו? נשים ♡ כי - אם נבחר $B=\emptyset$ מתקיים: $\emptyset\subseteq A$ ← $\emptyset\cup A=A$ ✓.

תכונות של משלימים:

1. $A\cup A^c=U$ כאשר - U הוא קב' העולם שלנו.
2. $\emptyset^c=U$
3. $U^c=\emptyset$
4. $(A^c)^c=A$

תרגיל: יהיו A,B תת"ק של U. הוכח: $B^c\subseteq A^c \leftrightarrow A\subseteq B$.

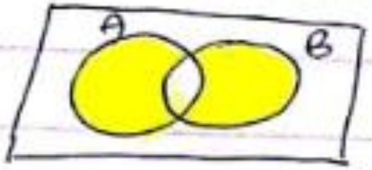
פתרון: נוכיח את 2 הכיוונים.

$\Leftarrow$ נתון: $B^c\subseteq A^c$ **וצ"ל:** $A\subseteq B$.

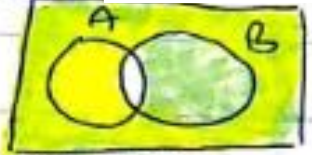
יהי: $x\in A$ $\Leftarrow$ $x\notin A^c$ נתון: $B^c\subseteq A^c$ ולכן - $x\notin B^c$ $\Leftarrow$ לפי הגד' משלים $x\in B$ **מש"ל**

$\Rightarrow$ **נתון:** $A\subseteq B$ **וצ"ל:** $B^c\subseteq A^c$.

יהי: $x\in B^c$ $\Leftarrow$ $x\notin B$, ובגלל ש-$A\subseteq B$ נקבל כי: $x\notin A$ $\Leftarrow$ לפי הגד' משלים $x\in A^c$. **מש"ל**



רק מה שמחוץ או ירוק



תרגיל (אם יש זמן):

צ"ל: $A \triangle B = A^c \triangle B^c$

פתרון: נשתמש בהצג – הפרש סימטרי כאיחוד הפרשים, $\underset{\text{לפי הגד'}}{\text{כלומר}}$ - $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$

$$x \in A \triangle B \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (\underbrace{x \in B}_{\text{לפי הגד'}} \wedge x \notin A) \underset{\text{משלים}}{\longleftrightarrow} (x \notin A^c \wedge x \in B^c) \vee (x \notin B^c \wedge x \in A^c) \longleftrightarrow$$

$$x \in (B^c \setminus A^c) \vee x \in (A^c \setminus B^c) \underset{\text{הגדרת איחוד}}{\longleftrightarrow} x \in (B^c \setminus A^c \cup A^c \setminus B^c) \underset{\text{הפרש סימטרי}}{\overset{\text{לפי הגד'}}{\longleftrightarrow}} x \in A^c \triangle B^c$$

מש"ל

הכללה לאיחוד וחיתוך כלשהם:

מוטיבציה: הגדרנו פעולות של חיתוך ואיחוד של 2 קבוצות. לפעמים נרצה להגדיר חיתוך ואיחוד של יותר מ-2 קבוצות, לדוגמה - 17 קבוצות או מס' אינ' של קבוצות. נשים לב - נגדיר:

הגדרה: $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות כאשר I קבוצת אינדקסים. אז נגדיר את החיתוך והאיחוד של הקבוצות.

(1) $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i\in I : x\in A_i\}$

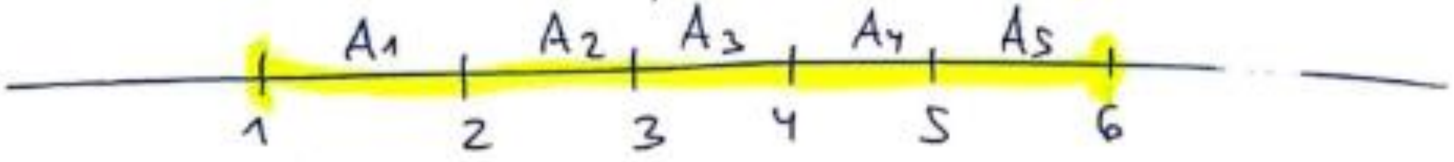
(2) $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i\in I : x\in A_i\}$

דוגמה: נגדיר $A_n := [n,n+1]$

השוו את: (1) $\bigcup_{n=1}^{5} A_n$ (2) $\bigcap_{n=1}^{5} A_n$ (3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (4) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

פתרון: (1) זהו איחוד - נשתמש בסימון אחר (האינדקס) שמשתמשים בו באיחוד כדי שיהיה לנו נוח.

$A_1=[1,2]$ $A_2=[2,3]$ $A_3=[3,4]$ $A_4=[4,5]$ $A_5=[5,6]$



המשך תרגיל:

(1) המשך ←

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{5} A_n = [1,6]}$$

(2) נשים ♡ כי $\underset{[1,2]}{A_1} \cap \underset{[5,6]}{A_5} = \emptyset$ ולכן - ברור כי $\bigcap_{n=1}^{5} A_n = \emptyset$

(3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [1,\infty)$ הוכחה - נראה הכלה דו כיוונית.

(⊆) ← יהי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ וצ"ל - $x\in[1,\infty)$ לפי הגדרת איחוד נקבל כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $x\in[n,n+1]$

ברור כי - $[n,n+1]\subseteq[1,\infty)$ ולכן - $x\in[1,\infty)$

(⊇) ← יהי $x\in[1,\infty)$ ונרצה להראות כי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

נגדיר את הפונקציה הבאה - $\lfloor\ \rfloor$ ← החלק השלם של x כלפי מטה. ברור כי $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$

לדוג' $\lfloor 2.25\rfloor = 2$, $\lfloor \pi\rfloor = 3$ וכו'. ולכן - ברור כי $x\in[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor+1] = A_{\lfloor x\rfloor}$

ולכן - לפי הגדרת איחוד נקבל כי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(4) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\emptyset$ ברור כי - $\emptyset \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{5} A_n = \emptyset$

מוכל תמיד!

בהצלחה!!!