בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ב, מועד ב'

18.9.2022, כ"ב אלול התשפ"ב

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר
מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הדר קנר, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A\triangle C \subseteq B\triangle C$ אז $A \subseteq B$.

(ב) אם $P(A) \in P(B)$ אז $A \in B$.

(ג) מתקיים $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

2. נגדיר פונקציה f מקבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות הלא ריקות של הטבעיים אל הטבעיים על ידי

$$f\left(\{x_1,,\ldots,x_k\}\right) = x_1\cdot x_2\cdots x_k$$

כלומר, לכל $A\subseteq\mathbb{N}$ לא ריקה, $f(A)$ הוא מכפלת האיברים ב A. למשל $f(\{2,3,4\}) = 2\cdot3\cdot4$, $f(\{3\}) = 3$.

(א) (6 נק') הוכיחו/הפריכו: f חח"ע.

(ב) (6 נק') הוכיחו/הפריכו: f על.

(ג) (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי

$$\sum_{A\in X_n}\frac{1}{f(A)} = n$$

כאשר $X_n = P\left(\{1,\ldots,n\}\right)\setminus\{\emptyset\}$.

3. (24 נק') נגדיר יחס S על $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ על ידי הכלל $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ אם ורק אם

$$x_1\cdot x_2 > 0 \text{ וגם } y_1\cdot y_2 > 0$$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות על $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

(ב) יהא $(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, קבעו אם עוצמת מחלקת השקילות שלו $|[(x,y)]_S|$ היא סופית, $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

(ג) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה

$$\left|{}^{(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})}/_S\right|$$

היא סופית, $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

4. (24 נק') תהא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה. נסמן ב $I:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ את פונקצית הזהות. הוכיחו את כל הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ f = f$ אז $R = f\cup I$ הוא יחס סדר.

(ב) אם $R = f\cup I$ הוא יחס סדר אז $f\circ f = f$.

(ג) אם $f\circ f = I$ אז $R = f\cup I$ הוא יחס שקילות.

(ד) אם $R = f\cup I$ הוא יחס שקילות אז $f\circ f = I$.

5. נגדיר שתת קבוצה A של $\mathbb{R}$ היא "שבורה מפנים" אם לכל שני איברים **שונים** x,y ב A מתקיים כי $x\cdot y\notin\mathbb{Z}$.

(א) (6 נק') תהא A שבורה מפנים מקסימאלית ביחס להכלה. הוכיחו ש A מקיימת כי $|A\cap\mathbb{Z}| = 1$.

(ב) (6 נק') הוכיחו שקיימת קבוצה שבורה מבפנים מקסימאלית ביחס להכלה.

(ג) (7 נק') הוכיחו שקיימת A שהיא שבורה מבפנים שמקיימת כי לכל $x\in\mathbb{R}\setminus A$ קיים $y\in A$ כך ש $x\cdot y\in\mathbb{Z}$ ובנוסף מקיימת, לכל n שלם: $A\cap[n,n+1]\neq\emptyset$ כאשר $[n,n+1]$ הוא הקטע הממשי

$$[n,n+1] = \{x\in\mathbb{R}\,|\,n\le x\le n+1\}$$