אם M חבורה אבלית, ו$\{f:M\to M|f(x+y)=f(x)+f(y)\}$, אז $\phi:R\to \operatorname{End}(M)$ הומומורפיזם של חוגים $\Leftrightarrow$ כפל בסקלר ההופך את M למודול מעל R = $\alpha\cdot m$ $.(\psi(\alpha))(m)$

כלומר סקלר(איבר בR) הופך לאנדומורפיזם על M, שמבצע את הפעולה של ההכפלה בסקלר. אפשר להגיד שהמודול זה הפונקציה שהופכת את הסקלר לאנדומורפיזם.

דוגמאות

- מודולים מעל $\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות.
- מודולים מעל $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות M כך ש$\exp|6$(חבורות אבליות M כך ש= $6M$ 0)
- מודולים מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות M כך ש$2M=0$ - מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- מודולים מעל שדה $\mathbb{F}$ = מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$
- מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ = מרחב וקטורי V + $T:V\to V$
- מודול מעל $\mathbb{F}[x,y]$ = מרחב וקטורי V + $\begin{matrix}S:V\to V\\ T:V\to V\end{matrix}$ כך ש$T\circ S=S\circ T$.

בשתי הדוגמאות האחרונות, כל פולינום הוא סקלר. לדוגמה:

$$xy\cdot v=x\cdot(yv)\qquad (x+y)\cdot v=x\cdot v+y\cdot v$$

וכו'.

- מודול מעל $\left\{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2\right\}=\mathbb{F}[\varepsilon]/\langle\varepsilon^3\rangle\supseteq\mathbb{F}$ = מרחב וקטורי + אופרטור $T:V\to V$ כך ש$T^3=0$

$$V\underset{v\mapsto\varepsilon\cdot v}{\to}V$$

M מודול מעל חוג R, $I\lhd R$.

מתי M הוא "בעצם" מודול מעל R/I?

אם לכל $a\in I$ מתקיים $a\cdot M=0$, אז M הוא מודול מעל R/I לפי הפעולה $(\alpha+I)\cdot v=\alpha\cdot v$

הערה: כל מודול מעל R/I הוא אוטומטית גם מודול מעל R: $\alpha\cdot v=(\alpha+I)\cdot v$.

תזכורת - תת מודול

$N\subseteq M$ כך ש$R\cdot N\subseteq N$

כלומר תת חבורה של המודול הסגורה לכפל בסקלר

מודול מנה

יהיו M מודול מעל R ו־N תת־מודול. אז המנה

$$^{M}/_{N} = \{x+N | x\in M\}$$

היא מודול מעל R לפי הפעולה

$$\alpha\cdot(x+N)=\alpha\cdot x+N$$

(מוגדר היטב כי $\alpha\cdot N\subseteq N$)

דוגמה

$\mathbb{F}$ שדה, $V=\mathbb{F}^2$.

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3y\end{pmatrix}$$

V מודול מעל $\mathbb{F}[\lambda]$ לפי הפעולה $\begin{pmatrix}x+2y\\3y\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. נחפש תת־מודול לא טריוויאלי,

$$0\subset U\subset V$$

$$U=\mathbb{F}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

תת מודול $\Leftrightarrow$ לכל $f(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$, $f(\lambda)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in U$ $\Leftrightarrow (f(T))\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}a+2b\\3b\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in U=\mathbb{F}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

קיים k כך ש

$$a+2b=ka$$

$$3b=kb$$

$b\neq 0$: $k=3$, $a=b$. $U_3=\mathbb{F}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathbb{F}[\lambda]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. במקרה הזה המודול מוגדר לפי $\lambda\cdot v=3v$

$b=0$: $k=1$. $U_1=\mathbb{F}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\mathbb{F}[\lambda]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. במקרה הזה המודול מוגדר לפי $\lambda\cdot v=v$

נחשב את מודול המנה $^{V}/_{U_1}$:

$$^{V}/_{U_1}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+U_1\middle|x,y\in\mathbb{F}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}+U_1\middle|y\in\mathbb{F}\right\}=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+U_1\right\}$$

$$\lambda\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+U_1\right)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+U_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+U_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+U_1=3\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+U_1\right)$$

הערה: $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+U_1=3\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+U_1\right)$ - מותר להוציא את 3 מחוץ לסוגריים מפני שההכפלה היא לא בין קבוצות, אלא בין קבוצות מנה, שמוגדרת באמצעות הכפלת המייצגים.

חוצמזה, $\mathbb{F}$ הוא שדה ולכן $3^{-1}\in U_1$, אבל זו לא הסיבה האמיתית לכך שניתן לבצע את זה.

מסקנה: $^{V}/_{U_1}$ הוא המודול המתואר ע"י ההעתקה $v\mapsto(3\cdot)\,v$

הומומורפיזם

M,N מודולים מעל R.

הומומורפיזם מM לN הוא פונקציה

$$f:M\to N$$

המקיימת

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$$

$$f\left(\alpha x\right)=\alpha\cdot f\left(x\right)\qquad\alpha\in R$$

דוגמאות

- A,B חבורות אבליות $\Leftarrow$ מודולים מעל $\mathbb{Z}$. כל הומומורפיזם על חבורות הוא הומומורפיזם של מודולים.
- V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ = מודולים של $\mathbb{F}$. הומומורפיזם של מודולים = הומומורפיזם של מ"ו.
- כל חוג הוא מודול מעל עצמו. הומומורפיזם של חוגים:

$$R\to R$$

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$$

הומומורפיזם של מודולים(מעל R):

$$R \to R$$

$$f(\alpha y) = \alpha \cdot f(y)$$

לדוגמה, $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. מהם ההומומורפיזם של חוגים $R \xrightarrow{f} R$?
נניח $\beta = f\left(\sqrt{2}\right)$, אז

$$\beta^2 = f\left(\sqrt{2}\right)^2 = f\left(\sqrt{2}^2\right) = f(2) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \pm\sqrt{2}$$

$$a + \sqrt{2} \mapsto a \pm b\sqrt{2}$$

כלומר, יש שני הומ' של חוגים מR לעצמו

הומומורפיזם של מודולים: יהי $f : R \to R$ הומומורפיזם של מודולים. נסמן $\gamma = f(1)$.

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot \gamma$$

האם $x \overset{f}{\mapsto} x \cdot \gamma$ היא הומומורפיזם של מודולים, $R \to R$?

- שומרת חיבור - $\checkmark$
- שומרת כפל בסקלר?

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha x) & \overset{?}{=} & \alpha \cdot f(x) \\ || & & || \\ (\alpha x)\gamma & \overset{\checkmark}{=} & \alpha \cdot (x\gamma) \end{array}$$

סיכום

יהי R חוג. לכל $\gamma \in R$, $x \mapsto x \cdot \gamma$ היא הומומורפיזם של מודולים מעל R, $R \to R$, ואלו כולם.

הגדרה

יהי $\varphi : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) | x \in M\} \leq N$$

$$\ker\varphi = \{x \in M | \varphi(x)\} = 0$$

הומומורפיזם שהוע חח"ע ועל נקרא <u>איזומורפיזם</u>.

משפט האיזומורפיזם הראשון

יהי $\varphi : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R. אז

$$\left.{}^{\mathrm{M}}\middle/_{\ker\psi}\right. \neq \mathrm{Im}\varphi$$

הוכחה

משפט האיזומורפיזם הראשון מחבורות מוכיח ש

$$\overline{\varphi} : x + \ker\varphi \mapsto \varphi(x)$$

הוא איזומורפיזם של חבורות

$$\left.{}^{\mathrm{M}}\middle/_{\ker\varphi}\right. \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\varphi$$

בנוסף לזה

$$\overline{\varphi}(\alpha \cdot (x + \ker\varphi)) = \overline{\varphi}(\alpha \cdot x + \ker\varphi) = \varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \overline{\varphi}(x + \ker\varphi)$$

פעולות בתת־מודולים

M מודול, $N_1, N_2 \leq M$.

$$N_1 + N_2 = \left\{ v_1 + v_2 \middle| \begin{array}{c} v_1 \in N_1 \\ v_2 \in N_2 \end{array} \right\}$$

זה תת מודול(הקטן ביותר שמכיל את N_1 ואת N_2)

משפט האיזומורפיזם השני

M מודול מעל R, $N, K \leq M$. אזי

$$\left.{}^{\mathrm{N+K}}\middle/_{\mathrm{K}}\right. \cong \left.{}^{\mathrm{N}}\middle/_{\mathrm{N\cap K}}\right.$$

הוכחה

נבנה הומומורפיזם $N \to {}^{N+K}/_{K}$ לפי $x \overset{\varphi}{\mapsto} x + K$ (φ על)

$$\ker\varphi = \{x | x + K = 0 + K\}$$

.....

משפט האיזומורפיזם השלישי

$K \subseteq N \subseteq M$ תת־מודולים מעל R. אז ${}^{N}/_{K} \subseteq {}^{M}/_{K}$ תת מודול, ובנוסף ${}^{M}/_{N} \cong {}^{(M/K)}/_{(N/K)}$

הוכחה

נגדיר הומומורפיזם ${}^{M}/_{N} \to {}^{N}/_{K}$ לפי $x + N \overset{\varphi}{\mapsto} x + K$ (מוגדר היטב כי $K \subseteq N$)

$$\ker\varphi = \{x + K | x + N = 0 + N\} = {}^{N}/_{K}$$

טענה(המודולריות של שריג תת־המודולים)

לכל שלושה תת־מודולים $K \subseteq N$ ו־L,

$$N \cap (L + K) = (N \cap L) + K$$

כלומר $N \cap L + K$ מוגדר היטב.

הוכחה

$\supseteq$ ברור.

$\subseteq$ נניח $\underbrace{n}_{\in N} = \underbrace{l}_{\in L} + \underbrace{k}_{\in K} \in N \cap (L + K)$

$$\Downarrow$$

$$N \ni n - k = \underbrace{l}_{\in L} \in L \cap N \Rightarrow n \in (N \cap L) + K$$

וניתן לצייר את שריג תת־המודולים: