פתרון תרגיל בית 5 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א׳ תש״ף

שאלה 1. מצאו את כל הקוסטים ב-$\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle$. מהו האינדקס של תת-החבורה?

פתרון. האיבר 3 הוא מסדר 10, ולכן $|\langle 3\rangle| = 10$. לפי משפט לגראנז׳ נקבל

$$|\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle| = \frac{|\mathbb{Z}_{30}|}{|\langle 3\rangle|} = \frac{30}{10} = 3$$

כלומר מספר הקוסטים שהוא האינדקס שווה ל-3, והקוסטים הם כמובן: $\{\langle 3\rangle, 1+\langle 3\rangle, 2+\langle 3\rangle\}$ (עד כדי בחירת נציגים).

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $|H| = 77, |K| = 1000$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. ידוע לנו כי $H \cap K$ היא תת־חבורה של H ושל K. לכן לפי משפט לגראנז׳ מתקיים כי $|H \cap K|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$. אך לפי הנתון, המספר היחיד שמחלק גם את $|H|$ וגם את $|K|$ הוא 1, לכן $|H \cap K| = 1$. וכיוון ש-$H \cap K$ ת״ח, היא מכילה את איבר היחידה, כלומר:$H \cap K = \{e\}$.
הערה: ע״י הוכחה זו ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל שתי ת״ח שהסדרים שלהן זרים זה לזה.

ב. יהי $x \in H \cap K$ איבר כלשהו. נניח בשלילה כי $x \neq e$. לכן $o(x) > 1$. אנחנו יודעים כי $o(x)$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$, ולכן בהכרח $o(x) = p$. כלומר $|\langle x\rangle| = p$, ומפני ש-H, K הן חבורות, הן סגורות לפעולה ונסיק $\langle x\rangle \subseteq H, K$.
מהנתון $|H| = |K| = p$ נקבל $K = H = \langle x\rangle$ כי ב-$\langle x\rangle$ יש בדיוק p איברים שונים.
אך זו סתירה לנתון, ונסיק כי $x = e$.

שאלה 3 (חזרה לבדידה)**.** תהי G חבורה ויהיו $A, B \subseteq G$ תת־קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו $\forall$ ו-$\exists$) ושיוויונות מן הצורה $xy = zw$ עבור איברים של הקבוצות.

א. $ab = ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B.

ב. $aB = Ba$ לכל איבר a של A.

ג. $AB = BA$ (קבוצה כזו מוגדרת כקבוצת המכפלות איבר-איבר).

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים ומי גורר את מי.

פתרון. כל סעיף גורר את אלו שתחתיו.

א. $\forall a \in A\ \ \forall b \in B : ab = ba$.

ב. $\forall a \in A\ \ \forall b \in B\ \ \exists b' \in B : ab = b'a$.

ג. $\forall a \in A\ \ \forall b \in B\ \ \exists b' \in B\ \ \exists a' \in A : ab = b'a'$.

שאלה 4. הוכיחו שאם $H \leq G$, אז $H \lhd G$ אמ"מ לכל $x, y \in G$, $xy \in H$ אמ"מ $yx \in H$.

פתרון. $(\Longleftarrow)$: H תת-חבורה נורמלית של G, לכן $H = ker(f)$ עבור הומומורפיזם f שתחומו G.

יהיו $x, y \in G$ כך ש-$xy \in H$ (ההוכחה דומה עבור המקרה שבו $yx \in H$). מתקיים: $f(x)f(y) = f(xy) = e$ כיוון ש-$H = ker(f)$.

זאת אומרת ש-$f(x), f(y)$ הופכיים זה לזה, לכן גם $f(yx) = f(y)f(x) = e$, ומכאן ש-$yx \in ker(f) = H$.

$(\Longrightarrow)$: יהיו $h \in H, g \in G$, נרצה להוכיח כי $g^{-1}hg \in H$ (זה יראה ש-$g^{-1}Hg \subseteq H$, כלומר: H סגורה להצמדה, תנאי שהוכחנו ששקול לנורמליות).

נשים לב כי $g^{-1}gh = h \in H$, ולכן לפי ההנחה, גם $g^{-1}hg \in H$ כדרוש (חשבו על זה כך: $x = g^{-1}, y = gh$).

ניתן להוכיח גם את הכיוון הראשון ע"י סגירות להצמדה, אך קצת גיוון לא יזיק.

שאלה 5. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר תת־קבוצה שלה

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\,, (1\ 3)\,(2\ 4)\,, (1\ 4)\,(2\ 3)\}$$

שנקראת חבורת הארבעה של קליין. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $V \lhd S_4$ (צ"ל שהיא ת"ח ושהיא נורמלית).

ב. כל חבורה מסדר 4 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$או ל-V (חשיבה על $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ יכולה לעזור).

ג. כל חבורה מסדר 5 ומטה היא אבלית (בפרט V אבלית).

פתרון. .

(א) קודם, צריך להוכיח ש-$V \leq S_4$. נוכיח לפי הקריטריון המקוצר. לפי הגדרה $\mathrm{id} \in V$ ולכן $V \neq \varnothing$. כעת, תהינה $\sigma, \tau \in V$. לכן $\sigma = \sigma^{-1}$ ו-$\tau = \tau^{-1}$ כי הם מסדר 2. רוצים להוכיח כי $\sigma\tau^{-1} \in V$, ולכן שקול להוכיח $\sigma\tau \in V$. אם σ או τ הן id, זה ברור. גם אם $\sigma = \tau$, אז $\sigma\tau = \sigma^2 = \mathrm{id}$. לכן נניח ש-$\sigma, \tau \neq \mathrm{id}$ ו-$\sigma \neq \tau$, ונבדוק את כל האפשרויות:

$$(1\ 2)\,(3\ 4)\,(1\ 3)\,(2\ 4) = (1\ 4)\,(2\ 3) \in V$$
$$(1\ 3)\,(2\ 4)\,(1\ 2)\,(3\ 4) = (1\ 4)\,(2\ 3) \in V$$
$$(1\ 2)\,(3\ 4)\,(1\ 4)\,(2\ 3) = (1\ 3)\,(2\ 4) \in V$$
$$(1\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 2)\,(3\ 4) = (1\ 3)\,(2\ 4) \in V$$
$$(1\ 3)\,(2\ 4)\,(1\ 4)\,(2\ 3) = (1\ 2)\,(3\ 4) \in V$$
$$(1\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 3)\,(2\ 4) = (1\ 2)\,(3\ 4) \in V$$

כלומר מכפלת כל שני איברים לא טריוויאלים שונים היא האיבר הלא טריוויאלי השלישי. לכן $\sigma\tau^{-1} = \sigma\tau \in V$.

כעת נראה $V \lhd S_4$. תהיינה $\sigma \in S_4$, $\pi \in V$. צ"ל $\sigma\pi\sigma^{-1} \in V$. אם $\pi = \mathrm{id}$ זה ברור, אחרת $\sigma\pi\sigma^{-1}$ היא תמורה ממבנה מחזורים $(i\ j)\,(k\ l)$, ולכן היא ב-V, כדרוש.

(ב) תהי G חבורה מסדר 4. אם G ציקלית, לפי טענה שהוכחנו, היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$. אחרת, לפי לגרנז', כל איבר ב-G הוא בהכרח מסדר 1 או 2 (ממש כמו ב-V. אם היה איבר מסדר 4 הוא היה יוצר את G).
מסדר 1 יש תמיד רק איבר אחד - היחידה, נסמנו ב-e', לכן יש ב-G 3 איברים מסדר 2, נסמנם ב: a', b', c'. מכאן יש רק אפשרות אחת לבנות לוח כפל ל-G (בנו ותבינו למה),
וזה בדיוק אותו לוח כפל כמו של V (ושל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) עד כדי שמות האיברים.
כלומר: $f: G \to V$ המוגדרת לפי: $f(a') = a, f(b') = b, f(c') = c, f(e') = e$,
היא איזומורפיזם (ברור שהיא חח"ע ועל, והזהות בין לוחות הכפל מראה שהיא גם שומרת על הפעולה).

(ג) תהי G חבורה כך ש-$|G| \leq 5$.
אם $|G| = 1$, זו החבורה הטריוויאלית שכמובן אבלית.
אם $|G| = 2, 3, 5$, זו חבורה ציקלית כי היא מסדר ראשוני ולכן היא אבלית.
ואם $|G| = 4$, לפי הסעיף הקודם, היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$או ל-V ששתיהן אבליות ולכן גם היא.

שאלה 6.

פתרון.
הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

ב. כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f: G \to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

ד. אם חבורת המנה G/N סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ה. אם חבורת המנה G/N ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

פתרון.

א. למשל $SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית, אבל היא נורמלית ב-$GL_2(\mathbb{R})$.

ב. למשל $\langle (1\ 2) \rangle$ היא תת־חבורה אבלית של S_3 שאינה נורמלית.

ג. למשל בכל שיכון $f: \langle (1\ 2) \rangle \to S_3$ התמונה היא לא תת־חבורה נורמלית.

ד. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $N = 2\mathbb{Z}$. אז $G/N \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

ה. נבחר $G = S_3$ ואת $N = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה G/N מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1 ולחבורה לא אבלית G_2, שיש להן תת־חבורות נורמליות $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$, כך שמתקיים $H_1 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$. רמז: אפשר למצוא דוגמאות כאלו כבר לחבורות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^2 עבור p ראשוני.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i לכל i. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה ${}^{G_i}/_{H_i}$ הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong \mathbb{Z}_2 \cong {}^{G_2}/_{H_2}$.

ב. נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \leq G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \leq G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

בהצלחה!