תרגיל 8

21 בינואר 2013

1 קוסטים וחבורות מנה

יש לפתור 2 מתוך 3 שאלות.

1. תהי G חבורה סופית, H,K תתי־חבורות של G. נסמן $HK=\{hk : h\in H, k\in K\}$. (שימו לב זו לא בהכרח חבורה כי H,K לא בהכרח נורמליות). הכלילו את משפט האיזומורפיזם השני מתרגיל בית מס' 7 על מנת לקבל את הנוסחה $|H||K|=|HK||H\cap K|$.

פתרון: לפי הגדרת HK, כל איבר ב־HK הוא מהצורה hk. כידוע, $|H\times K|=|H||K|$. נגדיר פונקציה (בין קבוצות, לא הומומורפיזם) $\phi : H\times K\to HK$ על ידי $\phi(h,k)=hk$. קל לראות כי פונקציה זו מוגדרת היטב. אנו נטען כי לכל איבר ב־HK יש $|H\cap K|$ מקורות ב־$H\times K$.
יהיו $h_1,h_2\in H,\ k_1,k_2\in K$ כך ש־$\phi(h_1,k_1)=\phi(h_2,k_2)$. לשון אחר: $h_1k_1=h_2k_2$. נכפיל ב־k_1^{-1} מימין וב־h_2^{-1} משמאל, ונקבל $h_2^{-1}h_1=k_2k_1^{-1}$. נשים לב לכך שהביטוי שזה עתה מצאנו שייך לחיתוך $H\cap K$. נסמן ביטוי זה על ידי $g=h_2^{-1}h_1=k_2k_1^{-1}$, ונקבל

$$h_2k_2=h_2(gk_1)=(h_2g)k_1=h_1k_1$$

בסך הכל נמצאנו למדים שלכל $g\in H\cap K$ ניתן לרשום את הביטוי hk גם בצורה $(hg)\left(g^{-1}k\right)$. לשון אחר, לכל $g\in H\cap K$ מתקיים $\phi(h,k)=\phi\left(hg,g^{-1}k\right)$. מנגד, אם $\phi(h_1,k_1)=\phi(h_2,k_2)$ אז קיים g שכזה.
בסך הכל מצאנו כי הפונקציה ϕ היא על, ולכל איבר בטווח יש $|H\cap K|$ מקורות. לפיכך $|H||K|=|H\times K|=|HK||H\cap K|$. ■

2. יהי n מספר טבעי, $k\mid n$. נזכיר שחבורה הדיהדרלית D_n היא חבורה שנוצרת על ידי סיבוב r ושיקוף s המקיימים את היחסים $r^n=s^2=e,\ srs=r^{-1}$.

(א) הראו שב־D_n יש תת־חבורה איזומורפית ל־D_k. (רמז: מצאו שיכון של D_k ב־D_n.)

פתרון: נשתמש באינטרפרטציה גאומטרית של החבורה הדיהדרלית. D_k היא חבורת תמורות של מצולע משוכלל בעל k צלעות. ניתן להניחו על המצולע של D_n, בעל n צלעות. מכיוון ש־$k\mid n$, ניתן להניח כל קדקוד של המצולע בעל k צלעות על קדקוד של המצולע בעל n צלעות. הסיבוב ב־D_k הוא סיבוב ב־$\frac{2\pi}{k}$. הסיבוב היוצר של D_n הוא של $\frac{2\pi}{n}$. לכן הסיבוב היוצר של הסיבוב ב־D_k יעבור ל־$\frac{n}{k}$ סיבובים יוצרים של D_n. השיקוף יישלח לשיקוף. בדיקה תראה שתמונת ההעתקה המצוגת כאן היא מעוצמה $2k$ ומקיימת את היחסים המתבקשים, ולכן התמונה הזו איזומורפית למקור, D_k. ■

(ב) נסמן את השיקוף ב D_n על ידי τ, ואת הסיבוב ב σ; סיבוב ב D_k על ידי r, ואת השיקוף ב s. הראו שפונקציה $\tau^i\sigma^j\mapsto s^ir^j$ היא הומומורפיזם. מצאו את הגרעין (kernel) שלה.

פתרון: נסמן התאמה זו על ידי f.
מוגדרת היטב: נראה כי אם $\tau^i\sigma^j=\tau^{i'}\sigma^{j'}$ אז גם $f\left(\tau^i\sigma^j\right)=f\left(\tau^{i'}\sigma^{j'}\right)$. ואכן, אם $\tau^i\sigma^j=\tau^{i'}\sigma^{j'}$ אז $i\equiv i' \pmod 2$ וכן $j\equiv j' \pmod n$. בפרט גם $j\equiv j' \pmod k$. ביחד נקבל $f\left(\tau^i\sigma^j\right)=s^ir^j=s^{i'}r^{j'}=f\left(\tau^{i'}\sigma^{j'}\right)$, ולכן f מוגדרת היטב.
שומרת מבנה: יהיו $\tau^{i_1}\sigma^{j_1},\tau^{i_2}\sigma^{j_2}\in D_n$. בחבורה זו מתקיים $\sigma\tau=\tau\sigma^{-1}$. חזרה על החלפה זו תראה ש־$\sigma^j\tau^i=\tau^i\sigma^{(-1)^ij}$. יחס דומה מקיימים גם r ו־s. לפיכך

$$f\left(\tau^{i_1}\sigma^{j_1}\tau^{i_2}\sigma^{j_2}\right)=f\left(\tau^{i_1+i_2}\sigma^{(-1)^{i_2}j_1+j_2}\right)=s^{i_1+i_2}r^{(-1)^{i_2}j_1+j_2}=s^{i_1}r^{j_1}s^{i_2}r^{j_2}=f\left(\tau^{i_1}\sigma^{j_1}\right)f\left(\tau^{i_2}\sigma^{j_2}\right)$$

אם כן, מצאנו כי f הומומורפיזם. נחשב את גרעינו:

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{\tau^i\sigma^j : f\left(\tau^i\sigma^j\right)=id_{D_k}\right\}=\left\{\tau^i\sigma^j : s^ir^j=id_{D_k}\right\}=\left\{\tau^i\sigma^j : i\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2), j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ k)\right\}\\ &= \left\{\tau^i\sigma^j : 2\mid i,\ k\mid j\right\}=\left\{\sigma^j : k\mid j\right\}=\left\langle\sigma^k\right\rangle\end{aligned}$$

אם כן מצאנו כי $f : D_n \to D_k$ היא הומומורפיזם, וגרעינו $\ker f = \left\langle \sigma^k \right\rangle$. ■

(ג) הראו $D_n / \left\langle \sigma^k \right\rangle \cong D_k$. (רמז: משפט נותר = משפטי האיזומורפיזם.)

פתרון: נשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון על f מהסעיף הקודם. כדי להשתמש במשפט זה צריך להראות כי $\mathrm{Im} f = D_k$, ובכך להראות כי f אפימורפיזם.
יהי $s^i r^j \in D_k$ נתון. אזי $f\left(\tau^i \sigma^j\right) = s^i r^j$, ולפיכך f על.נשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון, ונקבל $D_n / \left\langle \sigma^k \right\rangle \cong D_k$. ■

(ד) הראו ש $D_{2n} / Z(D_{2n}) \cong D_n$.

פתרון: ניזכר בתרגיל בית מס' 6 שאלה 8 סעיף ג. שם ראינו כי עבור n זוגי, המרכז של D_n הוא $\left\{ id, \rho^{\frac{n}{2}} \right\}$, כאשר מסמנים על ידי ρ את הסיבוב היוצר של D_n. נשים לב ש־$2n$ הוא מספר זוגי, ולפיכך אם נסמן את הסיבוב היוצר של D_{2n} ב־σ, נקבל $Z(D_{2n}) = \{id, \sigma^n\} = \langle \sigma^n \rangle$. אי־לכך, זהו יישום של הסעיף הקודם. ■

3. יהי p ראשוני. הוכיחו שכל חבורה G מסדר $2p$ איזומורפית ל D_p או $\mathbb{Z}_{2p}$. (רמז: ניתן פשוט להכליל את ההוכחה עבור מקרה של $p = 3$ שעשינו בכיתה. כל דרך אחרת תתקבל בברכה.)

פתרון: לפי משפט קושי, קיים ב־G איבר r מסדר p. לפי לגרנז', האינדקס של $\langle r \rangle$ ב־G הוא 2, ולכן זוהי תת־חבורה נורמלית ב־G. נביט בחבורת המנה $G / \langle r \rangle$. כאמור, סדר חבורה זו הוא 2, ולכן היא נורמלית ב־G. כמו־כן, לפי קושי, קיים ב־G גם איבר s מסדר 2. להלן נשתמש ב־$s^2 = e$ באופן חופשי.
נזכיר כי $\langle r \rangle \triangleleft G$. אם כן, $srs = srs^{-1} \in \langle r \rangle$. לשון אחר, קיים $0 \le k < p$ כך ש־$srs = r^k$. כעת,

$$r = s^2 r s^{-2} = s\left(srs^{-1}\right)s^{-1} = sr^k s^{-1} = \left(srs^{-1}\right)^k = \left(r^k\right)^k = r^{\left(k^2\right)}$$

נחלץ ממשוואה זו את המשוואה $r^{\left(k^2-1\right)} = e$ ולכן $p \mid \left(k^2 - 1\right)$. מכיוון ש־$p$ ראשוני, $p \mid (k+1)$ או $p \mid (k-1)$.
הפתרונות האפשריים בתחום $0 \le k < p$ הם לפיכך $k = p-1, 1$. ואכן, עבור $k = 1$ נקבל $srs = r$ ו־G איזומורפית ל־$\mathbb{Z}_{2p}$, ואם $k = p-1$ אז נקבל $srs = r^{p-1} = r^{-1}$, ואז יתקבלו כל היחסים המגדירים את D_p. ■

2 שיכונים ומשפט קיילי

יש לפתור 2 מתוך 3 השאלות הראשונות, שאלה 4, ושאלה אחת מתוך 5 או 6.

תזכורת: בתרגול ראינו שאם G חבורה, $H \le G$, X קבוצת הקוסטים השמאליים של H, אזי קיים הומומורפיזם ϕ מ G ל S_X (אוסף פונקציות חח"ע ועל מ G אל עצמה) שמתאים לכל איבר ב G את הפונקציה $\phi_g : X \mapsto X$ המוגדרת על ידי $\phi_g(aH) = gaH$.
הראנו שהגרעין $\ker\phi = \cap_{x \in G} x H x^{-1}$. ראינו ש $\ker\phi$ תת־חבורה נורמלית מקסימלית של G שמוכלת ב H. לפיכך ϕ הוא שיכון של G ב S_x אם ורק אם H אינה מכילה תתי־חבורות נורמליות של G פרט ל $\{e\}$.

1. בעזרת משפט קיילי, מצאו שיכון של D_4 ב S_8. בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.

פתרון: נסמן על ידי r את הסיבוב ועל ידי s את השיקוף. הכפלה משמאל ב־r מייצרת את התמורה הבאה:

$$\begin{array}{c} id \to r \to r^2 \to r^3 \to id \\ s \to sr^3 \to sr^2 \to sr \to s \end{array}$$

הכפלה משמאל ב־s מייצרת את התמורה הבאה:

$$\begin{array}{cc} id \leftrightarrow s & r \leftrightarrow sr \\ r^2 \leftrightarrow sr^2 & r^3 \leftrightarrow sr^3 \end{array}$$

לכן התמורות המתאימות הן

$$\begin{array}{rcl} r & \mapsto & (1\,2\,3\,4)\,(5\,6\,7\,8) \\ s & \mapsto & (1\,5)\,(2\,8)\,(3\,7)\,(4\,6) \end{array}$$

חשבון זה בוצע על ידי החלפה של id ב־1, r ב־2 וכן הלאה. ניתן לראות כי כל השיקופים הם 4 זוגות של חילופים זרים.
הסיבוב ב־180° גם הוא 4 זוגות של חילופים זרים. הסיבובים הם מכפלה של שני מחזורים מאורך 4. ■

2. בעזרת משפט קיילי, מצאו שיכון של Q_8 (הקווטרניונים) ב־S_8. בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.

פתרון: נביט ביוצרים של Q_8, i, j. הכפלה משמאל ב־i מייצרת את התמורה הבאה:

$$\begin{array}{l} 1 \to i \to -1 \to -i \to 1 \\ j \to k \to -j \to -k \to j \end{array}$$

הכפלה משמאל ב־j מייצרת תמורה דומה.

$$\begin{array}{l} 1 \to j \to -1 \to -j \to 1 \\ i \to -k \to -i \to k \to i \end{array}$$

נתאים לכל איבר ב־Q_8 מספר אחד מ־8 מספרים שונים. כך נקבל

$$\begin{aligned} i &\mapsto (1\,3\,2\,4)(5\,7\,6\,8) \\ j &\mapsto (1\,5\,2\,6)(3\,8\,4\,7) \end{aligned}$$

כך ניתן לשכן, בעזרת קיילי, את Q_8 ב־S_8. ■

3. מצאו שיכון של D_4 ב S_4. (רמז: אפשר להיעזר באינטרפרטציה גאומטרית של D_4 או להשתמש בהכללה של משפט קיילי מהתרגול).

פתרון: דרך א' (אינטרפרטציה גאומטרית). נביט בריבוע, ונמספר את קודקדיו. תמורה בחבורה הדיהדרלית מסובבת את קודקדי הריבוע. כך, ניתן להתאים שיכון כזה:

$$\begin{aligned} r &\mapsto (1\,2\,3\,4) \\ s &\mapsto (2\,4) \end{aligned}$$

ניתן לבדוק כי זהו מונומורפיזם.
דרך ב' (הכללה של משפט קיילי). אנחנו רוצים להגיע ל־S_4, ולכן צריכים למצוא תת־חבורה H כך ש־$[D_4 : H] = 4$. מנגד, אנו רוצים שזה יהיה שיכון, ולכן רוצים שב־H לא יהיו תת־חבורות נורמליות של D_4 מלבד הטריוויאלית. לסיכום, אנו מחפשים H בת 2 איברים, שאיננה נורמלית ב־D_4.
ל־D_4 יש 5 תת־חבורות מסדר 2 (כל אחד מהשיקופים הוא מסדר 2 וגם הסיבוב הכפול r^2 הוא מסדר 2). אבל $\langle r^2 \rangle \lhd D_4$, ולכן נבחר אחת מהחבורות האחרות, לדוגמא את $\{id, s\} = \langle s \rangle$. נסמן את הקוסטים השמאליים של $\langle s \rangle$ ב־D_4 על ידי X.

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} \{id, s\} & \{r, rs\} \\ \{r^2, r^2 s\} & \{r^3, r^3 s\} \end{array} \right\}$$

נגדיר $\phi : D_4 \to S_X \cong S_4$ על ידי כפל משמאל באיבר. נראה איזו תמורה משרה הכפל משמאל בכל אחד מהיוצרים שלנו, r, s.

$$\begin{array}{ll} r: & \{id, s\} \to \{r, rs\} \to \{r, rs\} \to \{r^3, r^3 s\} \to \{id, s\} \\ s: & \{id, s\} \to \{id, s\} \quad \{r, rs\} \to \{r^3, r^3 s\} \to \{r, rs\} \quad \{r^2, r^2 s\} \to \{r^2, r^2 s\} \end{array}$$

נחליף כל איבר ב־X במספר, ונקבל את השיכון

$$\begin{aligned} r &\mapsto (1\,2\,3\,4) \\ s &\mapsto (2\,4) \end{aligned}$$

ההכללה של קיילי מראה כי זהו שיכון, כמבוקש. ■

4. האם קיים שיכון של Q_8 ב S_4? (רמז: נסו לחשב סדר של כל איבר בחבורה).

פתרון: לא. ב־Q_4 יש 6 איברים מסדר 4: $\pm i, \pm j, \pm k$. איברים אלו ניחנו בתכונה שריבוע כולם זהה, -1. לכן, שיכון שלהם ישלח אותם ל־6 איברים שונים מסדר 4, אשר לכולם ריבוע אחד. ב־S_4 יש 6 איברים מסדר 4 (כל המחזורים מאורך 4). אבל הריבוע של כל מחזור הוא שונה, ולכן לא קיים שיכון שכזה. לשון אחר: ב־S_4 אין 6 איברים מסדר 4 שלכולם אותו הריבוע. בכך נסתר קיום השיכון. ■

5. יהיו p, q מספרים ראשוניים. תהי G חבורה מסדר pq. הוכיחו שאם ב־G יש תת־חבורה נורמלית מסדר p, וכן תת־חבורה נורמלית מסדר q, אזי G חבורה ציקלית.

הדרכה: הסבירו למה מספיק להוכיח שיש לכל היותר חבורה אחת מכל סדר שמחלק את pq: נניח בשלילה שיש יותר מאחת מסדר p. אזי יש איבר מסדר p שאינו בחבורה הנורמלית מסדר p מהנתון בשאלה. עברו למנה והגיעו לסתירה.

פתרון: נסמן P את תת־החבורה הנורמלית מסדר p וב־Q את תת־החבורה הנורמלית מסדר q. חבורות אלו הן חבורות מסדרים ראשוניים, ולכן הן ציקליות. נסמן את יוצריהן כך:

$$P = \langle g \rangle \qquad Q = \langle h \rangle$$

נניח בשלילה כי קיים $g' \notin P$ מסדר p. נביט בקוסט השמאלי ש־g' יוצר עם P: $g'P \in G/P$. מכיוון ש־P נורמלית ב־G, G/P היא חבורה, ואיבריה הם מסדרים 1 או q. $g' \notin P$ ולכן $g'P \neq P$, והסדר של $g'P$ הוא q. לפיכך, $P = (g'P)^q \neq (g'P)^p = (g')^p P$. אבל $P \ni e = (g')^p$. סתירה להנחה. לפיכך אין ב־$G \setminus P$ איברים מסדר p. בדומה, אין ב־$G \setminus Q$ איברים מסדר q. ביחד, ב־$G \setminus (P \cup Q)$ אין איברים מסדרים $1, p, q$. לכן איברים אלו הם מסדר pq. אם כן, כל אחד מאלה הוא יוצר יחיד של G ולפיכך G ציקלית. ■

6. תהי G חבורה מסדר pq, כאשר p ו q ראשוניים, $q < p$, $q \nmid (p-1)$.

(א) בעזרת הכללה של משפט קיילי הראו של־G קיימת תת־חבורה נורמלית H מסדר p.

הדרכה: על מנת להראות שחבורה היא נורמלית, הראו שלא קיים שיכון של G ב S_X, כאשר X היא קבוצת הקוסטים השמאליים של החבורה הנורמלית H. לכן, לפי המשפט שהזכרנו, קיימת ב H תת־חבורה נורמלית של G ששונה מ $\{e\}$. משיקולי סדר, חבורה זו יכולה להיות רק H בעצמה.

פתרון: לפי משפט קושי, ל־G יש תת־חבורה H מסדר p. עלינו להראות כי $H \lhd G$. ההכללה של משפט קיילי קובעת כי קיים הומומורפיזם $\phi : G \to S_{G/H}$. אם ϕ הוא שיכון, אז H איננה מכילה תת־חבורות נורמליות ב־G חוץ מהטריוויאלית. נראה כי ϕ זה איננו שיכון.
נסמן את היוצר של H על ידי h. H נורמלית, ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $Hg = gH$ ובפרט $hg = gh^i$. כעת נחשב את $\phi(h) = f_h$. יהי $g \in G$ נתון. אזי

$$f_h(gH) = hgH = gh^iH = gH = egH = f_e(gH)$$

שוויון זה מתקיים לכל $gH \in G/H$, ולכן $\phi(h) = f_h = f_e = \phi(e)$. כך מצאנו כי ϕ איננו חח"ע, ולפיכך איננו שיכון.
לפי ההכללה של משפט קיילי, ϕ איננו שיכון א.ס.ם. ב־H יש תת־חבורה נורמלית שאיננה הטריוויאלית. משיקולי סדר, אין ב־H עוד תת־חבורות מלבד H והטריוויאלית. לפיכך, H נורמלית ב־G. ■

(ב) נניח כי h הוא היוצר של H. יהי $k \notin H$ נתון. אזי $khk^{-1} \in H$. נסמן $khk^{-1} = h^m$. בעזרת הצמדות חוזרות, הראו כי $m^q \equiv 1 \pmod p$.

פתרון: נביט בחבורת המנה G/H. חבורה זו היא מגודל q, ולכן $k^qH = (kH)^q = H$, ולפיכך $k^q \in H$. אם כן, k^q מתחלף עם h. לפיכך מתקיים

$$\begin{aligned} h &= k^q h k^{-q} = k^{q-1}\left(khk^{-1}\right)k^{-q+1} = k^{q-1}h^m k^{-q+1} \\ &= \left(k^{q-1}hk^{-q+1}\right)^m = \cdots = ((\cdots h^m \cdots)^m)^m = h^{(m^q)} \end{aligned}$$

אם כן, $h = h^{(m^q)}$. אי לכך, $h^{(m^q-1)} = e$ ולכן $m^q - 1 \equiv 0 \pmod p$ ולפיכך $m^q \equiv 1 \pmod p$. ■

(ג) בעזרת התכונות של $\mathbb{Z}_p^*$, הראו שאם $m^q \equiv 1 \pmod p$ אז הסדר של m מחלק את $p-1$ ואת q.

פתרון: m הוא איבר בחבורה $\mathbb{Z}_p^*$, כי הוא מוגדר עד כדי מודולו p. בחבורה זו יש $p-1$ איברים, ולכן הסדר של כל איבר מחלק את $p-1$. בפרט $o(m) \mid (p-1)$. לפי הנתון, m^q הוא האיבר הנייטרלי של $\mathbb{Z}_p^*$, ולכן הסדר של m מחלק את q. ■

(ד) הסיקו $m = 1$, ולכן G אבלית.

פתרון: q הוא ראשוני, ולכן המחלק המשותף המקסימלי שלו עם כל מספר הוא q או 1. אבל לפי הנתון, q איננו מחלק את $p-1$, ובפרט q איננו מחלק משותף מקסימלי של $p-1$ עם q. לכן $\gcd(p-1, q) = 1$. לפי הסעיף הקודם, $m \mid \gcd(p-1, q) = 1$ ולכן $m = 1$.
מצאנו כאן כי $kh = hk$. אבל kH הוא יוצר של G/H ו־h הוא יוצר של H, ולכן שניהם יחד יוצרים את G כולה (כל איבר ב־G שייך לקוסט k^aH מסוים, ולכן שווה ל־k^ah^b). אם כן, היוצרים של G מתחלפים, ולכן G אבלית. ■

(ה) הראו ש G ציקלית.

פתרון: דרך א'. מצאנו כאן כי G היא חבורה אבלית מסדר pq, ולכן כל תת־חבורותיה נורמליות. אם כן, יש לה תת־חבורה נורמלית מסדר p ותת־חבורה נורמלית מסדר q וניתן להפעיל את התשובה לשאלה 5 לעיל.
דרך ב'. G אבלית מסדר pq. יש לה איבר h מסדר p ואיבר נוסף k שהסדר שלו מתחלק ב־q. אם הסדר של k

הוא pq אז k מייצר את G, והיא ציקלית. אחרת, $o(k)=q$. נביט באיבר kh. איבר זה איננו מסדר 1, כי הוא איננו האיבר הנייטרלי. הוא גם לא מסדר p או q, כי

$$\begin{aligned}(kh)^p &= k^p h^p = k^p \neq e\\ (kh)^q &= k^q h^q = h^q \neq e\end{aligned}$$

לפיכך kh הוא איבר מסדר pq, ולכן הוא יוצר את החבורה G. ■

3 הצמדה, נוסחת המחלקה ומשפט קושי

יש לעשות את השאלות 1, 3 ואחת מתוך 2, 4 ו 5.

1. הוכיחו שכל חבורה מסדר p^2 אבלית.

הדרכה: היעזרו בכך שבחבורה מסדר p^n המרכז איננו החבורה הטריוויאלית. טענה זו הוכחה בשיעור התרגיל האחרון. כמו־כן היעזרו במשפט: תהי חבורה G כך ש $G/Z(G)$ ציקלית, אזי G אבלית.

פתרון: $Z(G)\leq G$. לפי לגרנז', הסדר של $Z(G)$ הוא $1,p,p^2$. לפי המשפט שבהדרכה, שהוכחנו בשיעור התרגיל, הסדר איננו 1. נניח בשלילה כי המרכז הוא מסדר p. המרכז של חבורה הוא תמיד תת־חבורה נורמלית, ולכן ניתן להביט בחבורת המנה $G/Z(G)$. חבורה זו היא מסדר p, ולכן היא ציקלית. לפי המשפט האחר שבהדרכה, G אבלית. אבל אז $G=Z(G)$ והסדר של המרכז איננו p. זו סתירה להנחה בשלילה. לפיכך הסדר של המרכז הוא p^2, ונקבל $Z(G)=G$. לפיכך G אבלית, כמבוקש. ■

תזכורת:

(א) הראנו שב S_n שתי תמורות צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים.

(ב) יהי $g\in G$. הגדרנו את המְרַכֵּז של g ב G , $C_G(g):=\{x\in G: xg=gx\}$. נסמן את מחלקת הצמידות של $g\in G$ על ידי $conj(g)$ או $\mathcal{C}_g$ (אלו סימונים שונים למחלקת צמידות). מתקיים $|conj(g)||C_G(g)|=|G|$.

2. הראו ישירות ש K_4 היא תת־חבורה נורמלית של S_4.

פתרון: אמרהו בשיעור התרגיל שתת־חבורה $H\leq G$ היא נורמלית א.ס.ם. היא איחוד של מחלקות צמידות. לפי התזכורת, אנו יודעים מה המבנה של מחלקות צמידות ב־S_4, ולכן מתקיים

$$\begin{aligned}conj(e) &= \{e\}\\ conj((1\,2)(3\,4)) &= \{(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}\end{aligned}$$

מתקיים $K_4=conj(e)\cup conj((1\,2)(3\,4))$, ולכן היא נורמלית. ■

3. יהיו $r\leq n$ טבעיים.

(א) הוכח שקיימים $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ מחזורים שונים באורך r.

פתרון: הפתרון הוא קומבינטורי טהור. ראשית יש לבחור r איברים מתוך n, עם חשיבות לסדר. כל בחירה שכזו נרשום באותו הסדר כמחזור. כאלה יש $\frac{n!}{(n-r)!}$. אבל כל מחזור ניתן לפתוח באחד מ־r האיברים ללא השפעה על המחזור, ולכן נחלק מספר זה ב־r. בסך הכל מצאנו $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ אפשרויות שונות. ■

(ב) בעזרת הסעיף הקודם, חשב את גודל מחלקת הצמידות של $(1\dots r)$ ב S_n.

פתרון: לפי התזכורת, מחלקת צמידות של מחזור ב־S_n היא כל המחזורים מאותו האורך. לפיכך גודל המחלקה הוא מספר המחזורים מאורך זה, וכפי שחישבנו בסעיף הקודם, $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$. ■

(ג) הראה שכל איבר במְרַכֵּז של $(1\dots r)$ הוא מן הצורה $\tau(1\dots r)^i$ כאשר $0\leq i\leq r-1$, ו τ היא תמורה שקובעת (=איננה מזיזה) את $1,\dots,r$.

פתרון: ראשית, נראה כי האיברים מהצורה $\tau(1\dots r)^i$ כדלעיל מתחלפים עם $(1\dots r)$. τ מתחלף עם המחזור שלנו כי הוא זר לו, וכל התמורות הזרות מתחלפות. $(1\dots r)^i$ מתחלף עם המחזור שלנו כי הוא חזקה שלו, וגם זה נכון לכל איבר בחבורה. לפיכך גם מכפלתם מתחלפת, ואכן כל הביטויים מהצורה $\tau(1\dots r)^i$ מתחלפים עם המחזור שלנו $(1\dots r)$. מחזורים הזרים ל־$(1\dots r)$ יש $(n-r)!$. חזקות של $(1\dots r)$ יש r. לכן עד כה מנינו $(n-r)!r$ איברים במרכז. גודלו של המרכז נקבע על ידי נוסחת המחלקות, וכפי שהזכרנו בתזכורת. לכן

$$|C_{S_n}((1\dots r))|=\frac{|S_n|}{|conj((1\dots r))|}=\frac{n!}{\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}}=\frac{\cancel{n}!}{\frac{1}{r}\frac{\cancel{n}!}{(n-r)!}}=(n-r)!r$$

אם כן, מצאנו כאן את כל האיברים של המרכז, ולפיכך איבריו הם מהצורה $\tau(1\dots r)^i$. ■

4. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית. הוכח/הפרך: אם g ו h צמודים ב G אזי הם צמודים ב N.

פתרון: נראה דוגמא נגדית, בעזרת השאלה הבאה. $S_4 \triangleleft A_4$. ומתקיים (123) איננו צמוד ל־(132) ב־A_4, אבל $(23)(123)(23)^{-1} =$ (132) ולכן ב־S_4 הם צמודים. כל החשבונות מופיעים בתשובה הבאה. כמובן, ניתן לקחת גם דוגמאות אחרות, כמו (123) ו־(132) הצמודים ב־S_3 אבל לא ב־$\langle(123)\rangle$. ■

5. מצא את כל מחלקות הצמידות של A_4.

פתרון: <u>דרך א'</u>. איברים הצמודים זה לזה ב־A_4 צמודים גם ב־S_4. לפיכך, אנו יודעים כי בכל מחלקת צמידות יש רק איברים מטיפוס מחזורים אחד. אנחנו לא יודעים אם כל האיברים מטיפוס מסוים איברים נמצאים באותה מחלקה, כי אנחנו לא יכולים להצמיד על ידי כל החילופים (החילופים הם היוצרים של S_4, ואף אחד מהם איננו ב־A_4).
לפיכך שיטת העבודה שלנו היא כדלהלן: ניקח איבר מ־A_4, נצמיד אותו על ידי איברים מ־A_4. אם נראה כי כיסינו את כל מחלקת הצמידות שלו ב־S_4 אז סיימנו. אחרת נראה כי שאר האיברים מאותו מבנה מחזורים אינם צמודים לו.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{id} &= \{id\} \\
\mathcal{C}_{(12)(34)} &= \{(12)(34), (14)(23), (13)(24)\} \\
\mathcal{C}_{(123)} &= \{(123), (142), (134), (243)\} \\
\mathcal{C}_{(132)} &= \{(132), (124), (143), (234)\}
\end{aligned}$$

הדרך שבה גילינו ש־$\mathcal{C}_{(123)} \neq \mathcal{C}_{(132)}$ היא על ידי הצמדות של (123) על ידי כל איברי A_4. ראינו שאף הצמדה איננה נותנת (132). ואכן, התמורה שאנו יודעים שהצמדה בעזרתה תביא את (123) ל־(132) היא החילוף (23), שאיננו ב־A_4, כידוע.
<u>דרך ב'</u>. לפי נוסחת המחלקות, אנו יודעים כי עוצמתה של כל מחלקה מחלקת את הסדר של החבורה. החבורה שלנו היא מעוצמה 12, ולכן כל מחלקות הצמידות שלה הן מסדרים $1, 2, 3, 4, 6, 12$. נחזור על החישוב מדרך א'. נותר לנו להראות כי $\mathcal{C}_{(123)} \neq \mathcal{C}_{(132)}$. ובכן, איחוד הקבוצות האלו הוא מעוצמה 8 שאיננה מחלקת את הסדר של החבורה 12. לפיכך 2 קבוצות אלו אינן במחלקת צמידות אחת. ■