בוחן בדידה קיץ תשפא

26.7.2021 , י"ז אב תשפ"א

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחן: שעה ורבע.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 120 נקודות.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (15 נקודות לסעיף) תהא X קבוצה. תת קבוצה $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ תקרא "מאחדת-משלימה" אם:

- $\mathcal{S}$ אינה ריקה.
- היא סגורה לאיחודים: לכל שתי קבוצות $A, B \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A \cup B \in \mathcal{S}$.
- היא סגורה למשלים: לכל קבוצה $A \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A^c \in \mathcal{S}$ (כאשר $A^c = X \backslash A$).

תהיינה $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq P(X)$ שתי מאחדות-משלימות. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו כי $\emptyset \in \mathcal{S}$ וגם $X \in \mathcal{S}$.

(ב) הוכיחו כי $\mathcal{S}$ סגורה לחיתוכים. כלומר: לכל שתי קבוצות $A, B \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A \cap B \in \mathcal{S}$.

(ג) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: גם החיתוך $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ הוא קבוצה מאחדת-משלימה.

(ד) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: גם האיחוד $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ הוא קבוצה מאחדת-משלימה.

2. (20 נקודות לסעיף) הגדרה: עבור a, b ממשיים, נגדיר את הקטע הסגור $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$.
תהא $A \subseteq \mathbb{N}$. נגדיר יחס על $A^c = \mathbb{N} \backslash A$ כך

$$(m \sim n) \iff (B_{m,n} \cap A = \emptyset)$$

כאשר $B_{m,n} = [m, n] \cup [n, m]$.

(א) הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות על A^c.

(ב) מצאו A עבורה מספר האיברים בקבוצת המנה, $A^c/\sim$, הוא 3 וכל מחלקת שקילות בת 4 איברים בדיוק.

(ג) <u>**אין קשר לסעיף קודם**</u>.
לכל k טבעי נגדיר את הקבוצה

$$A_k = kA = \{ka \,|\, a \in A\}$$

ונגדיר, באופן דומה, את היחס R_k על A_k^c כך

$$(m, n) \in R_k \iff (B_{m,n} \cap A_k = \emptyset)$$

כאשר $B_{m,n}$ הוגדר בראש השאלה. הוכיחו: אם $A \neq \emptyset$ אז $\cup_{k \in \mathbb{N}} R_k$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{N}$.