מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 1

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. קבע נכון או לא נכון ונמק:

א. אם $p$ אמת ו- $q$ שקר אז $p \wedge q$ אמת.

ב. אם $p$ אמת, $q$ שקר ו- $r$ שקר אז $p \vee (q \wedge r)$ אמת.

ג. הפסוק $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$ הוא טאוטולוגיה.

ד. הפסוקים $p \wedge (q \vee r)$ ו- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ שקולים.

פיתרון:

א. לא נכון. לפי הגדרת "וגם" (טבלת האמת שלו).

ב. נכון. הצבה $T \vee (F \wedge F) \equiv T \vee F \equiv T$.

ג. נכון. טבלת אמת.

ד. לא נכון. הצבה: $p = T, q = F, r = F$.

2. נגדיר את הקשר $NOR$ באופן הבא:

$x\, NOR\, y := \neg(x \vee y)$

א. כתוב טבלת אמת עבור הקשר $NOR$

ב. הוכח כי קבוצת הקשרים $\{NOR\}$ היא קבוצת קשרים שלמה (מותר להסתמך על תוצאות אשר הוצגו בהרצאה ובתרגול לגבי קבוצות קשרים בעלות **שני** איברים או יותר בלבד).

פיתרון:

א.

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $\neg(x \vee y)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | T |

ב. מספיק להראות שאפשר להציג את המערכת השלמה $\{\neg, \vee\}$ על ידי $NOR$:

i. $xNORx \equiv \neg(x \vee x) \equiv \neg x$

ii. ברור ש $\neg(xNORy)$ יהיה שקול ל- $x \vee y$; צריך רק להציג את $\neg(xNORy)$ על ידי הקשר $NOR$ בלבד ואת זה אנחנו יודעים לעשות לפי i:

$(xNORy)\, NOR\, (xNORy) \equiv \neg(xNORy) \equiv \neg(\neg(x \vee y)) \equiv x \vee y$.

3. הוכח את השקילויות הבאות (השתמש בטבלאות אמת):

א. $A \to B \equiv \neg A \vee B$

ב. $(A \to B) \to (B \to A) \equiv A \vee (\neg B)$

ג. $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

פיתרון: טבלאות אמת. למשל ג:

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ | $A \to B$ | $B \to A$ | $(A \to B) \wedge (B \to A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

4. בטא בצורה שקולה את:

א. $(p \wedge q) \to (q \wedge r)$ באמצעות הקשרים $\vee$ , $\neg$ בלבד.

ב. $(p \to \neg q) \to r$ באמצעות הקשרים $\wedge$ , $\neg$ בלבד.

ג. $((p \wedge q \wedge s) \vee r) \vee s$ באמצעות הקשרים $\to$ , $\neg$ בלבד.

פיתרון:

א. $(p \wedge q) \to (q \wedge r) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg q \vee \neg r)$.

ב.
$$(p \to \neg q) \to r \equiv (\neg p \vee \neg q) \to r \equiv \neg(p \wedge q) \to r \equiv$$
$$(p \wedge q) \vee r \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg r)$$

ג.
$$((p \wedge q \wedge s) \vee r) \vee s \equiv \neg((p \wedge q \wedge s) \vee r) \to s \equiv \neg(\neg(p \wedge q \wedge s) \to r) \to s \equiv$$
$$\neg((\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \to r) \to s \equiv \neg((\neg(\neg p \vee \neg q) \to \neg s) \to r) \to s \equiv$$
$$\neg((\neg(p \to \neg q) \to \neg s) \to r) \to s$$

5. שאלת בונוס: מצא פונקציה בוליאנית שאינה ניתנת להצגה כפסוק עם הקשרים $\vee, \wedge$ בלבד. הוכח.

פיתרון:

טענה: כל פסוק המכיל את הקשרים $\wedge, \vee$ בלבד, מקבל את הערך T בהצבת T בכל האטומים שמופיעים בו (הוכחה אינדוקטיבית על בניית פסוק עם שני הקשרים בלבד).

לכן, כל פסוק המקבל ערך F בהצבת T בכל האטומים שבו, לא ניתן לכתיבה על ידי שני הקשרים $\wedge, \vee$ בלבד. למשל: $\neg X$.