בוחן לדוגמא 2

יש לבחור שלוש שאלות מתוך ארבעת השאלות. משך הבוחן: 100 דקות

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

שאלה 2

א. חשב את אורך העקום $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ בתחום $0\le x\le 3$.

ב. בדוק התכנסות/התבדרות $\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}dx$.

שאלה 3

א. יהי $\alpha>0, 0<b<1$ הוכיחו כי $\int_0^b \frac{1}{x|\ln(x)|^{\alpha}}dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$.

ב. הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$ עבור $-1\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר x. מצא את שטח המעטפת של הגוף המתקבל.

שאלה 4

א. בדוק התבדרות/התכנסות בהחלט/התכנסות בתנאי $\int_0^{\infty}e^{-2x}\cos xdx$

ב. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin(x^2)$ והישרים $y=0, x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}, x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ מסתובב סביב ציר y. מהו נפח הגוף המתקבל?

פתרון 1

א.

$$\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x}dx=\int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+x}=\int (\frac{x^3+x}{x^3+x}+\frac{6x^2+11x+8}{x^3+x})dx=$$

$$=\int\left(1+\frac{2(3x^2+1)}{x^3+x}+\frac{11x+6}{x^3+x}\right)dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int 1dx = x,\ \int \frac{2\left(3x^2+1\right)}{x^3+x}dx = 2\ln\left(x^3+x\right)$$

נשאר לחשב $\int \frac{11x+6}{x\left(x^2+1\right)}dx = \int\left(\frac{11x}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{6}{x\left(x^2+1\right)}\right)dx$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int \frac{11}{x^2+1}dx = 11\arctan x$$

$$\int \frac{6}{x\left(x^2+1\right)}dx = 6\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = 6\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)$$

סה"כ נקבל שהפתרון הוא

$$x+2\ln\left|x^3+x\right|+11\arctan x+6\ln|x|-3\ln\left(x^2+1\right)$$

ב. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

נציב $x=\frac{\sin t}{2}$ ונקבל $dx=\frac{\cos t}{2}dt$

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-4\cdot\frac{\sin^2 t}{4}} = |\cos t|$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{\sin^2 t}{4\cos t}\cdot\frac{\cos t}{2}dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 t dt = \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{16}-\frac{\sin 2t}{32} =$$

$$= \frac{t}{16}-\frac{\sin t\cos t}{16} = \frac{t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{16} = \frac{\arcsin 2x-2x\sqrt{1-4x^2}}{16}+c$$

<u>פתרון 2</u>

א.

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \Leftarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2} \Leftarrow f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) = \sqrt{x}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$1+\left(f'(x)\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \Leftarrow 1+\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{4x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \Leftarrow 1+\left(f'(x)\right)^2 = 1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = \int_0^3\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)dx = \left[x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3 = \sqrt{3}+1.5\sqrt{3} = 2.5\sqrt{3}$$

ב. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ פונקציה חיובית לכל x בקטע $[1,\infty)$ ולכן נשתמש במבחן ההשוואה השני.

נסמן $g(x)=\frac{1}{x}$ ונשים לב ש $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדר.

נשתמש במבחן ההשוואה השני.

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}{x}=2$ ולכן גם $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\,dx$ מתבדר.

<u>פתרון 3</u>

א. נציב $t=\ln x \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$ מכיוון ש $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ אז מספיק לבדוק התכנסות או התבדרות של $\int_{-\infty}^{\ln b}\frac{1}{(-t)^\alpha}\,dt$ הראינו בהרצאה שכאשר $0<\alpha\le 1$ האינטגרל מתבדר וכאשר $\alpha>1$ $\int_{-\infty}^{\ln b}\frac{1}{(-t)^\alpha}\,dt$ מתכנס.

ב. נשתמש בנוסחה $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$$1+(f'(x))^2=\frac{4}{4-x^2} \Leftarrow (f'(x))^2=\frac{x^2}{4-x^2} \Leftarrow f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \Leftarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

$$f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}=2$$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}2dx=8\pi .$$

<u>פתרון 4</u>

א. נבדוק תחילה התכנסות בהחלט $\int_0^\infty e^{-2x}|\cos x|dx=\int_0^\infty |e^{-2x}\cos x|dx$.

נשים לב ש $f(x)=e^{-2x}|\cos x|$ פונקציה אי שלילית ומתקיים $e^{-2x}|\cos x|\le e^{-2x}$ ולכן מהתכנסות של $\int_0^\infty e^{-2x}dx$ ניתן להסיק התכנסות של $\int_0^\infty |e^{-2x}\cos x|dx$ ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

ב. נשתמש בנוסחה $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

$$V=2\pi\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sin(x^2)dx=2\pi\left[\frac{\cos(x^2)}{2}\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}=\pi\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\pi$$