פתרון תרגיל בית 6

<u>שאלה 1</u>

א. נתבונן בתמורות $(123),(132)$. מצאו תמורה ב-S_4 שמצמידה אותן. לאחר מכן הראו שהן אינן צמודות ב-A_4. הראו שהן כן צמודות ב-A_5.

ב. מצאו את מחלקות הצמידות $conj(123), conj(132)$.

<u>פתרון</u>

א. תהי $\mu \in S_4$ המקיימת $\mu(123)\mu^{-1} = (132)$. נראה ש $\mu \notin A_4$.

$\mu(123)\mu^{-1} = (\mu(1)\mu(2)\mu(3))$. אם $(\mu(1)\mu(2)\mu(3)) = (132)$ אזי ישנן שלוש אפשרויות ל μ שנסמן μ_1, μ_2, μ_3.

אפשרות ראשונה: $\begin{matrix} \mu_1(1)=1 \\ \mu_1(2)=3 \\ \mu_1(3)=2 \end{matrix}$ אבל אז $\mu_1 = (23)$ וזהו חילוף ולכן $\mu_1 \notin A_4$.

אפשרות שניה: מתקבלת מהבחנה $(\mu(1)\mu(2)\mu(3)) = (321) = (132)$.

נקבל $\begin{matrix} \mu_2(1)=3 \\ \mu_2(2)=2 \\ \mu_2(3)=1 \end{matrix}$ ושוב קל לראות ש μ_2 הוא חילוף ולכן $\mu_2 \notin A_4$.

אפשרות שלישית: נשים לב שגם $(213) = (\mu(1)\mu(2)\mu(3))$ ושוב מקבלים (איך?) חילוף שאינו ב-A_4.

בסה"כ נקבל שהתמורות אינן צמודות ב-A_4.

מאידך, ב-A_5 התמורות צמודות. ניעזר למשל ב $\mu_1 = (23)$ הנ"ל שניתן לראותו גם כאיבר ב-S_5. נשים לב ש $\sigma = (23)(45) \in A_5$ וכן $\sigma(123)\sigma^{-1} = (132)$.

ב. $conj((132)) = \{(132),(241),(234),(143)\}$,

$conj((123)) = \{(123),(134),(142),(243)\}$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \lhd G$. הוכיחו או הפריכו:

א. $G/B \cong G/A$ אם ורק אם $A=B$.

<u>פתרון</u>

ניקח $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $A=\{0\}\times\{0,1\}$, $B=\{0,1\}\times\{0\}$, ומתקיים הדרוש.

ב. $G/B \cong G/A$ אם ורק אם $A\cong B$.

<u>פתרון</u>

ניקח $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$, $A=\{(0,0),(2,0)\}$, $B=\{(0,0),(0,1)\}$.

ג. אם $G\cong G/A$ אזי A היא תת-החבורה הטריוויאלית.

<u>פתרון</u>

ניקח $G=\mathbb{C}^*$, $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המקיימת $f(x)=x^2$. אזי עבור $A=\ker(f)=\{1,-1\}$ מתקיים $G\cong G/A$, בעוד ש-A אינה טריוויאלית.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תהי $Q_8=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת על-ידי: $ijk=k^2=j^2=i^2=-1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים**.

לוח הכפל שלה הוא:

·	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
1	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
−1	−1	1	−i	i	−j	j	−k	K
i	i	−i	−1	1	k	−k	−j	J
−i	−i	i	1	−1	−k	k	j	−j
j	j	−j	−k	k	−1	1	i	−i
−j	−j	j	k	−k	1	−1	−i	I
k	k	−k	j	−j	−i	i	−1	1
−k	−k	k	−j	j	i	−i	1	−1

א. מצאו את כל תת החבורות של Q_8.

ב. הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא נורמלית. (רמז: בדקו את האינדקס של תת החבורות).

ג. הוכיחו ש- Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4.

<u>פתרון</u>

ב- Q_8 יש 3 תתי-חבורות מסדר 4:

$\{\pm1,\pm i\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי i,

$\{\pm1,\pm j\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי j,

$\{\pm1,\pm k\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי k.

האינדקס של כל אחת מהן הוא: $[Q_8 : H] = \frac{8}{4} = 2$

ולכן כל אחת מהן היא נורמלית עפ"י הטענה שכל ת"ח בעלת אינדקס 2 היא נורמלית.

יש ת"ח אחת מסדר 2: $\{1,-1\}$. ת"ח זו היא גם המרכז של חבורת הקווטרניונים כיוון שרק עבור $1,-1$ מתקיים: $1\cdot x = x\cdot 1 = x \quad , -1\cdot x = x\cdot(-1) = -x$ לכל $x \in Q_8$. לכן היא נורמלית.

כמובן שיש גם ת"ח טריוויאלית מסדר 1 והיא $\{1\}$, והיא נורמלית כי 1 הוא האיבר הנייטרלי של החבורה.

מדוע אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8 ?

לפי משפט לגרנז' סדר של תת-חבורה מחלק את סדר החבורה, וכיוון ש- $|Q_8| = 8$ כל ת"ח של חבורת הקווטרניונים היא מסדר 1,2 או 4.

<u>מסדר 1</u>- $\{1\}$ היא הת"ח היחידה מסדר 1.

<u>מסדר 2</u>- בת"ח מסדר 2 האיבר האחד הוא הניטרלי-1 ולכן השני חייב להיות איבר מסדר 2 ו-(1-) הוא האיבר היחיד מסדר 2 בחבורת הקווטרניונים. לכן אין עוד ת"ח מסדר 2 ב- Q_8.

<u>מסדר 4</u>- ניקח למשל את i (ובאופן סימטרי זה יהיה נכון גם אם נקח את j או k). אז ת"ח זו חייבת להכיל את כל חזקות i כדי שתהיה סגירות לפעולה לכן ת"ח זו מכילה את $\{\pm1,\pm i\}$. זאת אומרת שהת"ח היא לפחות מסדר 4 . אבל לפי לגרנז' אין ת"ח ממש גדולה יותר שמכילה אותה.

לכן מלבד שלוש תת-החבורות מסדר 4 הנזכרות, אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8.

כעת, Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4:

ב- Q_8 כל תת חבורה מסדר 4 היא ציקלית, וב- D_4 לא (יש אחת שאינה ציקלית, מי היא?).

הסבר נוסף: ב- D_4 יש 5 איברים מסדר 2, וב- Q_8 יש רק איבר אחד מסדר 2.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

תהיינה $A,B,C \lhd G$ כך ש- $B \subseteq A$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

<u>פתרון</u>

ראשית שימו לב שמנתוני השאלה $B \lhd A$ שכן $B \lhd G$ וגם $B \le A$ (תורשתיות).
כמו כן, מהתנאי $A,B,C \lhd G$ נקבל ש- $AC,BC \lhd G$, ומכך ש- $B \le A$ נסיק ש- $BC \le AC$ ולכן מתורשתיות $BC \lhd AC$. מכאן A/B ו- AC/BC אכן חבורות. נמצא אפימורפיזם $f : A/B \to AC/BC$ ואז ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש $AC/BC \cong \left(A/B\right)/\ker f$ ומכאן AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

תהי $f : A/B \to AC/BC$ פונקציה המוגדרת על-ידי $f(aB) = aBC$. שימו לב ש- $A \subseteq AC$ (כי $e_G \in C$) ולכן אם $a \in A$ אז גם $a \in AC$. נוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב. נניח $a_1B = a_2B$ אזי $a_1\left(BC\right) = \left(a_1B\right)C = \left(a_2B\right)C = a_2\left(BC\right)$ ולכן הפונקציה מוגדרת היטב. בנוסף,
$f\left(a_1Ba_2B\right) = f\left(a_1a_2B\right) = a_1a_2BC = a_1BCa_2BC = f\left(a_1B\right) f\left(a_2B\right)$ ולכן זהו הומומורפיזם. נותר להראות שהוא על. אבל זה נובע מכך שלכל $a \in A, c \in C$
$f\left(aB\right) = aBC = aCB = a\left(cC\right)B = acCB = acBC$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. הוכיחו שמתקיים $GL_2\left(\mathbb{Z}_7\right)/SL_2\left(\mathbb{Z}_7\right) \cong U_7$.

ב. מצאו את כל תתי החבורות של $GL_2(\mathbb{Z}_7)$ המכילות את $SL_2(\mathbb{Z}_7)$.

<u>פתרון</u>

א. נתבונן בהומומורפיזם הדטרמיננטה $\det : GL_2(\mathbb{Z}_7) \to U_7$ ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל הדרוש.

ב. נשתמש במשפט ההתאמה. נסמן את האפימורפיזם $\det$ מהסעיף הקודם ב- φ.

תתי החבורות של U_7 הן: $U_7, \{1\}, \langle 2\rangle, \langle 6\rangle$. מתקיים:

$$\beta(U_7) = GL_2(\mathbb{Z}_7),\ \beta(\{1\}) = SL_2(\mathbb{Z}_7)$$

$$\beta(\langle 2\rangle) = \varphi^{-1}(\langle 2\rangle) = \{x \in GL_2(\mathbb{Z}_7) : \det(x) \in \{1,2,4\}\}$$

$$\beta(\langle 6\rangle) = \{x \in GL_2(\mathbb{Z}_7) : \det(x) \in \{1,6\}\}.$$

מש"ל