תרגול 10

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \iff d_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

תרגיל: קבעו התכנסות של $f_n(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right)$

א. בקטע $[a,b]$, $a>0$.

ב. בקטע $(0,\infty)$

פתרון: פונקצית הגבול היא: $f_n(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(x)$

א.

$$\left(\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in[a,b]}\left(f_n(x)-f(x)\right)=0\right)$$

$$\sup_{x\in[a,b]}\ \ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right)-\ln(x)$$

$$\sup_{[a,b]}\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

מונוטונית עולה לכן ה- sup מתקבל עבור $x=b$

ולכן $=\sup\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=\ln(1\ \ b)$

$$\lim_{n\to\infty}\ \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)=\ln(1)=0$$

כן יש התכנסות במ"ש.

ב. בקטע $(0,\infty)$:

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

לכן אין התכנסות במ"ש בקטע האינסופי.

לסיכום: יש התכנסות נקודתית (לפונקציה רציפה)
אך יש התכנסות במ"ש רק בקטע סגור $[a,b]$
ולא בקטע אינסופי.

תרגיל: בדקו התכנסות של סדרת הפונקציות

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$ בקטע $[0,1]$

פתרון: התכנסות נקודתית:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

נבדוק התכנסות במ"ש:

$$\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right\}$$

נבדוק נק' חשודות: הקצוות: $x=0,\ x=1$

ונגזור ונשווה ל-0:

$$\frac{d}{dx}\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{n(1+n^2x^2)-nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2}=0\ /:n$$

$$=1+n^2x^2-2n^2x^2=0$$

$$1=n^2x^2$$

$$x^2=\frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{x=\pm\frac{1}{n}}$$

בקטע שלנו הנק' החשודות הן $x=0,\ x=\frac{1}{n},\ x=1$

$$f_n(x)-f(x)\Big|_{x=\frac{1}{n}}=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

הערה: כבר כאן רואים שאם צ.ה ה-sup

של סדרת החסמים אינה שואפת ל-0.

במקרה שלנו ה-sup בוודאי גדול מ- (או שווה) ½ ולכן

סדרת החסמים בוודאי אינה שואפת לאפס וניתן לעצור כאן.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע I $\Leftarrow$ $f(x)$ חסומה ב-I.

פתרון: הפרכה: ניקח את הסדרה הקבועה

$f_n(x)=\frac{1}{x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x\in(0,1]} \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right\}}_{=0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ההתכנסות היא במ"ש והפונקציה הגבולית $f(x)=\frac{1}{x}$ אינה חסומה.

טורי פונקציות:

תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ נקרא טור פונקציות.

בכל נק' $x_0\in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$

יכול להיות טור מספרים. אם יש התכנסות של הטור

נאמר שטור הפונקציות מתכנס נקודתית בנק' x_0.

נסמן: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ונגדיר פונקצית הסכום (אם קיים)

נסמן $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$.

אם $S(x)$ קיים אז הטור מתכנס נקודתית.

אם $S(x) \overset{\text{בקטע } I}{\rightrightarrows} S_n(x)$ אז הטור מתכנס במ"ש ל-$S(x)$.

בקטע I.

תרגיל: קבעו התכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} x^{n-1}$

בקטע $(-1,1)$.

$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

פתרון: נכתוב את סדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} \underset{x\in(-1,1)}{=} \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$S_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x} = S(x)$$

כלומר בקטע $(-1,1)$ יש התכנסות נק'.

האם יש התכנסות במ"ש?

$$\sup_{x\in(-1,1)}\left\{|S_n(x)-S(x)|\right\}=\sup_{x\in(-1,1)}\left\{\left|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right|\right\}$$

$$=\sup_{x\in(-1,1)}\left\{\frac{+x^n}{1-x}\right\}=\infty \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

ולכן אין התכנסות במ"ש בקטע $(-1,1)$

אבל, יש התכנסות במ"ש בכל קטע סגור

שמוכל ממש ב $(-1,1)$.

התכנסות סדרת החסמים לטורי פונקציות

נותנת לנו את קריטריון קושי להתכנסות טור

פונק' במ"ש.

אם נסמן $r_n(x)=S_n(x)-S(x)$ השארית של הטור

נקבל $\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in I}|r_n(x)|\right]=0$

$\Updownarrow$

הטור מתכנס במ"ש.

לדוגמה: (תזכורת: דוגמה טור לייבניץ $\sum(-1)^n \underline{a_n}$

$$S(x)-S_n(x)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}-\sum_{k=1}^{n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}$$

$$\left(|r_n|\le a_{n+1}\right.$$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_n$$

א. קבעו התכנסות של טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n}$
בקטע $[-1,3]$

לכל $x_0 \in [-1,3]$ הטור הוא טור לייבניץ ולכן
מתקיים $|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{k} \right| \le \frac{x^2}{n+1}$

ולכן
$$\sup_{x\in[-1,3]} |r_n(x)| \le \sup_{x\in[-1,3]} \frac{x^2}{n+1} = \frac{9}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |r_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

<u>תזכורת:</u> התכנסות במ"ש של פונ' רציפות
היא התכנסות לפונקציה רציפה. ולכן אם $f_n(x)$
רציפות וטור הפונק' $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש
אז $S(x)$ גם היא רציפה

(כיוון ש $S_n(x)$ היא פונק' רציפה כסכום <u>סופי</u> של רציפות)

<u>תרגיל:</u> קבעו התכנסות של טור הפונקציות
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

פתרון: $|r_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ הינו טור מתכנס

ולכן השארית של הטור מתכנסת ל-0.

כלומר $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ולכן $|r_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ולכן לפי סנדוויץ' הטור שלנו מתכנס במ"ש.

<u>מסקנה מהתרגיל האחרון</u>:

משפט - מבחן ה-M של ויירשטראס:

יהי $\sum f_n(x)$ טור פונקציות המוגדר בקטע I.

אם קיים טור מספרים <u>חיוביים</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

כך ש $|f_n(x)| \le a_n \quad \forall n, \forall x \in I$

אזי $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$

מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את ה-$\sup$ של $x(1-x)$ בקטע $[0,1]$.

נסמן $f(x)=x(1-x)=x-x^2$

$$f'(x)=1-2x=0$$
$$\boxed{x=1/2}$$

נק' חשודות: $0, 1/2, 1$

$$f(0)=0$$
$$f(1/2)=1/4$$
$$f(1)=0$$

ולכן המקסימום הגלובלי הוא $f(1/2)=1/4$.

לכן מתקיים $0\le f(x)\le 1/4 \quad \forall x\in[0,1]$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N} \quad x^n(1-x)^n \le \left(1/4\right)^n$$

כיוון שהטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ הוא טור מתכנס, נקבל לפי מבחן ה-M ני עם הטור $\sum x^n(1-x)^n$ מתכנס במ"ש.

תרגיל: הראו ש הפונקציה $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$ היא פונק' רציפה על $\mathbb{R}$.

$f_k(x)=\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$ היא סדרה של פונק' רציפות

ולכן גם $S_n(x)$ רציפה, ואם נוכיח שהטור מתכנס במ"ש אז ההתכנסות תהיה לפונקציה רציפה

$S(x)$

ננסה לחסום את $\frac{k^2 x}{1+k^7x^2}$ ולהשתמש

במבחן ה - M.

נמצא מקס: נגזור ונקבל שיש 2 נק' חשודות $x=\pm\frac{1}{k^{3.5}}$

נציב ונקבל $f_k\left(\frac{1}{k^{3.5}}\right) = \frac{k^{2-3.5}}{1+1} = \frac{1}{2k^{3/2}}$

ף

טור המספרים הזה הינו מתכנס ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

ולכן הפונקציה רציפה $\boxed{}$