מערך תרגול 14 אינפי 1 למדמ"ח

הגדרה 14.1 תהי $<a_n>$ סדרה. סדרת הסכומים החלקיים של a_n מוגדרת על ידי

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

הגדרה 14.2 הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הסדרה S_n מתכנסת.

תרגיל 14.3 האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n})$ מתכנס?

פתרון: נחשב את סדרת הסכומים החלקיים. ראשית נשים לב ש

$$a_n = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n$$

ולכן

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln 1 \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

כלומר מצאנו את סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \ln(n+1)$. היות ש

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

נקבל כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n})$ אינו מתכנס.

לכאורה התרגיל לעיל מראה לנו את דרך הפעולה במצב שנתקלים בטור. מחשבים את S_n ובודקים האם היא מתכנסת (ואם כן, לאן?)

הבעיה היא שבדר"כ מאוד קשה לחשב את S_n (בטח עם הכלים המועטים שאחנו מכירים כרגע), ולכן בדר"כ השיטה הזאת לא מעשית. אנחנו נצטמצם לשאלה: האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס? (נוותר מראש על הנסיון להבין לאן הוא מתכנס), ונשתמש בכלים עקיפים.

תזכורת 14.4 אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$.

תרגיל 14.5 האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ מתכנס?

פתרון: היות ש $\frac{n}{n+1} \to 1$ הטור מתבדר.

שימו לב שאפשר להשתמש בכלי זה **רק** כדי להוכיח התבדרות. אם $a_n \to 0$ זה לא אומר שהטור מתכנס.

תהי a_n סדרה. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הגדרה 14.6 אומרים שטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ לא מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי.

הערה 14.7 כל טור חייב להיות אחד מ3 הסוגים: מתכנס בהחלט/מתכנס בתנאי/מתבדר.
טור חיובי לא יכול להתכנס בתנאי.

מעכשיו השאלה המרכזית שלנו תהיה: בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נרצה לדעת אם הוא מתכנס בהחלט/מתכנס בתנאי/מתבדר.

תזכורת 14.8 הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

תזכורת 14.9 (מבחן ההשוואה) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים חיוביים וקיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \leq cb_n$ אז:

- אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
- אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.

תרגיל 14.10 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$ מתכנס?

פתרון: היות ש

$$\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן גם הטור שלנו מתכנס.

תזכורת 14.11 (מבחן ההשוואה הגבולי) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים חיוביים וקיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש $a_K \leq cb_K$. לכל K אינסופי.

- אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתכנס.
- אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$מתבדר.

תרגיל 14.12 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n^2+7n+6}$ מתכנס?

פתרון: נראה לנו כאילו הטור צריך להתנהג כמו $\frac{1}{n}$. אכן אם נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{n}$ נקבל שלכל K אינסופי

$$\frac{1}{K} \leq 3\frac{K+5}{2K^2+7K+6}$$

היות ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ טור מתבדר, גם הטור שלנו מתבדר.

תזכורת 14.13 (מבחן קושי - מבחן השורש) יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. ונניח ש $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- אם $L < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
- אם $L > 1$ אז הטור מתבדר.

תרגיל 14.14 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n}$ מתכנס?

פתרון: במקרה הזה $a_n = \frac{2^n n^2}{3^n}$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \sqrt[n]{n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

ולכן הטור שלנו מתכנס.

תזכורת 14.15 (מבחן דאלאמבר - מבחן המנה) יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. ונניח ש $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$.

- אם $L < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
- אם $L > 1$ אז הטור מתבדר.

תרגיל 14.16 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ מתכנס?

פתרון: במקרה הזה $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ומתקיים

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} < 1\end{aligned}$$

ולכן הטור שלנו מתכנס.

תזכורת 14.17 (מבחן העיבוי) יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי כך ש a_n סדרה מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.
כדאי לשקול להשתמש במבחן זה אם יש $\ln$ בביטוי.

תרגיל 14.18 עבור אילו ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ מתכנס?

פתרון: אפשר לבדוק ש

$$a_n = \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$$

היא אכן סדרה מונוטונית יורדת ל 0 (למשל, אפשר להגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}$$

ולוודא ש $f'(x) < 0$ וש $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ - אבל נוותר על הבדיקה הזאת כאן). נשתמש במבחן העיבוי ונקבל שהטור שלנו מתכנס אם ורק הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\alpha}(2)}$$

והטור הזה מתכנס כידוע אם ורק אם $\alpha > 1$

תזכורת 14.19 (מבחן לייבניץ) תהי a_n סדרה חיובית מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0 אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

דוגמא 14.20 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס.

תרגילים נוספים אם נשאר זמן.

תרגיל 14.21 האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

פתרון: נשתמש במבחן דאלאמבר

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 \to 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט. (הטור לא יכול להתכנס בתנאי כי הוא חיובי)

.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$

פתרון: ראשית נשים לב שלפי לייבניץ, הטור מתכנס. אבל זה עדיין לא אומר לנו אם הוא מתכנס בהחלט או בתנאי. כדי לבדוק זאת נסתכל על הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$$

מה קורה עם הטור הזה? נשים לב ש $(\ln n)^2 \leq n$ ולכן

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{(\ln n)^2}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

הוא טור מתבדר. נקבל לפי מבחן ההשוואה הגבולי שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$ מתבדר.

למסקנה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$ מתכנס בתנאי.

.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+n}{n^2}$

פתרון: נשים לב שאת הטור ניתן לפצל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

הטור הימני מתבדר, והטור השמאלי מתכנס (כי הוא מתכנס בהחלט, הרי

$$|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$$

סכום של טור מתכנס וטור מתבדר הוא טור מתבדר ולכן הטור שלנו מתבדר.

תרגיל 14.22 יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס. האם גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ מתכנס?

פתרון: לא בהכרח. ניקח $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס לפי לייבניץ. ואילו הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר.

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס. האם גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ מתכנס?

פתרון: כן. הרי $a_n \to 0$ ולכן החל משלב מסוים $(a_n)^2 \le a_n$ ולכן לפי מבחן ההשוואה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$$

גם מתכנס.