תרגיל 4

להגשה בשבוע שמתחיל ב 3.4.2016

1. יהא Vמ"ו מימד n ותהא $T : V \to V$ ה"ל המקיימת כי $T^3 = 0$. נניח שקיים $v \in V$ כך ש $T^2(v) \neq 0$ הוכיחו כי

   (א) $Im(T^2) \subseteq \ker T$

   פתרון: יהא $T^2w \in Im(T^2)$ (כאשר $w \in V$). צ"ל כי $T^2w \in \ker T$ כלומר כי $T\left(T^2w\right) = 0$ אכן

$$T\left(T^2w\right) = T^3w = 0(w) = 0$$

.

   (ב) הקבוצה $\left\{v, Tv, T^2v\right\}$ בת"ל

   פתרון: נניח כי

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i T^i v = 0$$

צריך להוכיח כי $\alpha_i = 0$ לכל i (שימו לב להגדרה כי $T^0 = I$). שימו לב כי $T^3v = 0(v) = 0$ וגם $T^4v = T\left(T^3v\right) = T(0) = 0$. כעת נפעיל T^2 על שני האגפים ונקבל

$$0 = T^2(0) = T^2\left(\sum_{i=0}^{2} \alpha_i T^i v\right) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i T^{i+2} v = \alpha_0 T^2 v$$

כיוון שנתון ש $T^2v \neq 0$ בהכרח $\alpha_0 = 0$. כעת גילינו כי ההנחה היא

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i T^i v = 0$$

נפעיל T על שני האגפים ונקבל באופן דומה כי $\alpha_1 = 0$ ואז נשארנו עם $\alpha_2 T^2 v = 0$ שזה גורר כי גם $\alpha_2 = 0$.

2.

   (א) יהא V, W מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ ו $T : V \to W$ ה"ל. הוכיחו כי $span\left\{Tv_1, \ldots, Tv_n\right\} = T\left(span\left\{v_1, \ldots, v_n\right\}\right)$

   פתרון: נוכיח הכלה דו כיוונית:

   $(\subseteq)$יהא $v \in span\left\{Tv_1, \ldots, Tv_n\right\}$ אזי

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T v_i$$

וזה

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tv_i=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)\in T\left(span\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}\right)$$

$(\supseteq)$יהא $v\in T\left(span\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}\right)$ אזי

$$v=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)$$

עבור $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in span\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}$ ולכן

$$v=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tv_i\in span\left\{Tv_1,\ldots,Tv_n\right\}$$

(ב) יהא $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהא $W=span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\right\}\leq\mathbb{R}^{2\times 2}$ מצאו ה"ל $T:V\to V$ כך ש

$$ImT=\ker T=W$$

פתרון: נשלים לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר לפי משפט ההגדרה

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\mapsto 0$$

$$\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\mapsto 0$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}$$

ואז

$$Im(T)=T\left(span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix},0,0\right\}=W$$

ובנוסף

$$4=\dim\mathbb{R}^{2\times 2}=\dim\ker T+\dim Im(T)=\dim\ker T+2$$

ולכן

$$\dim\ker T=2$$

כיוון ש

$$span\left\{\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)\right\}\le\ker T$$

מאותו מימד אזי הם שווים.

.3

(א) יהיו V,W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. נסמן $\dim V=n,\dim W=m$. אזי

i. $n\le m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע (ולכן למשל לא קיימת הע"ל חח"ע $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$)

ii. $n\ge m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ על (ולכן למשל לא קיימת הע"ל על $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$)

iii. $n=m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע ועל. במקרה זה מסמנים $V\cong W$ והמינוח הוא " V,W איזומורפי

סעיף זה אינו שאלה שצריך לענות עליה אבל ודאו כי אתם יודעים להוכיח את הטענות. הרעיון בכל שלושת הטענות: נבחר בסיס $\{v_1\dots v_n\}$ ל V. נבחר בסיס$\{w_1\dots w_m\}$ ל W. לפי משפט ההגדרה ניתן להגדיר ה"ל $T:V\to W$ ע"י קביעה $Tv_i=?$ לכל $1\le i\le n$. לכן אם $n\le m$ אזי נוכל להגדיר $Tv_i=w_i$לכל $1\le i\le n$. אם $n\ge m$ אזי נוכל להגדיר $Tv_i=w_i$לכל $1\le i\le m$ ולכל שאר v_i עם $m+1\le i\le n$ נגדיר שרירותית $Tv_i=0$

(ב) נגדיר $V=span\{2+x,1+x\}\le\mathbb{R}_2[x]$ ו $W=span\left\{\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)\right\}\le\mathbb{R}^{2\times2}$. מתקיים כי $\dim V=\dim W=2$ ולכן לפי המשפט קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע ועל. מצאו T כזאת מפורשות. וחשבו

$$T(1+x),T(3+2x),T(x)$$

פתרון: לפי משפט ההגדרה, נגדיר

$$1+x\quad\mapsto\quad\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right)$$

$$2+x\quad\mapsto\quad\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)$$

באופן מפורש

$$T\left(\alpha(1+x)+\beta(2+x)\right)=\alpha T(1+x)+\beta T(2+x)=\alpha\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right)+\beta\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)$$

ולכן

$$ImT=T\left(span\{2+x,1+x\}\right)=span\left\{\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)\right\}=W$$

כלומר Tעל. בנוסף

$$T\left(\alpha(1+x)+\beta(2+x)\right)=\alpha\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right)+\beta\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)=0$$

גורר כי $\alpha=\beta=0$ בגלל ש $\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&2\\0&0\end{array}\right)$ בת"ל מה שגורר כי $\alpha(1+x)+\beta(2+x)=0$ ולכן $\ker T=\{0\}$ שזה שקול לכך ש T חח"ע.

כעת

$$\begin{aligned}
T(1+x) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
T(3+2x) &= T\left((1+x)+(2+x)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
T(x) &= T\left(2(1+x)-(2+x)\right) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. תהא $T:V\to V$

(א) ודאו כי הינכם יודעים להוכיח כי (אין צורך לכתוב את התשובה) $\ker T\subseteq \ker T^2$ וגם $Im(T^2)\subseteq Im(T)$

(ב) הוכיחו כי הבאים שקולים

i. $\ker T=\ker T^2$

ii. $Im(T)=Im(T^2)$

היעזרו במשפט הדרגה (פעם עבור T ופעם עבור T^2). זיכרו כי אם $W\leq V$ (כלומר W תת מרחב של V) מאותו מימד אזי הם שווים ($V=W$)

הערה: גם

iii. $\ker T\oplus Im(T)=V$

שקול לקודמים אבל לשם קיצור התרגיל - הוכיחו כי (א) גורר (ג) [אנחנו מוותרים לכם על הכיוון (ג) גורר (א) אבל כדאי שתדעו להוכיח זאת]

תזכורת: משפט המימדים: יהיו W_1,W_2 שני תתי מרחבים אזי מתקיים כי $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$. ייתכן שיותר קל להתחיל להוכיח כי $\ker T\cap Im(T)=\{0\}$ ואז $\ker T+Im(T)=V$

פתרון: לפי משפט הדרגה (פעם עבור T ופעם עבור T^2)

$$\dim\ker T^2+\dim Im(T^2)=\dim V=\dim\ker T+\dim Im(T)$$

ולכן

$$\dim\ker T=\dim\ker T^2 \iff \dim Im(T)=\dim Im(T^2)$$

כעת נוכיח ש א) ו ב) שקולים.

אם $\ker T=\ker T^2$ ולכן $\dim\ker T=\dim\ker T^2$ ולכן $\dim Im(T)=\dim Im(T^2)$. כיוון ש $Im(T^2)\subseteq Im(T)$ מאותו מימד הם שווים.

אם $\dim Im(T)=\dim Im(T^2)$ ולכן $\dim Im(T)=\dim Im(T^2)$לכן $\dim\ker T=\dim\ker T^2$. כיוון ש $\ker T\subseteq\ker T^2$ מאותו מימד הם שווים.

נוכיח (א) גורר (ג):

צריך להוכיח שני דברים: 1. $\ker T+Im(T)=V$ 2. $\ker T\cap Im(T)=\{0\}$.

נתחיל ב2. יהא $w\in\ker T\cap Im(T)$. צ"ל כי $w=0$. אכן מהגדרת החיתוך נובע כי $Tw=0\wedge\exists v:Tv=w$

כעת נחבר את שני העובדות ונקבל

$$T^2v=T(Tv)=Tw=0$$

ולכן $v\in\ker T^2$ מהנתון נובע כי $v\in\ker T$ כלומר $w=Tv=0$ וסימנו.

1. כעת, ממשפט המימדים ומשפט הדרגה נקבל כי

$$\dim(\ker T + Im(T)) = \dim\ker T + \dim Im(T) - \dim(\ker T \cap Im(T)) = \dim\ker T + \dim Im(T) - 0 = \dim V$$

ולכן קיבלנו כי $\ker T + Im(T) \leq V$ מאותו מימד ולכן שווים.

בהצלחה!