אינפי 1 – מתמטיקה – פתרון תרגיל 1

הבינום של ניוטון

.1

I. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

II. $(x-y^2)^6=x^6-6x^5y^2+15x^4y^4-20x^3y^6+15x^2y^8-6xy^{10}+y^{12}$

III. $(x^2+3)^3=x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$

IV. $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^5=\frac{401}{32}+\frac{149}{16}\sqrt{2}$

V. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6=x^3-6x^{3/2}+15-20x^{-3/2}+15x^{-3}-6x^{-9/2}+x^{-6}$

2. איבר כללי לאחר פתיחת סוגריים נראה כך: $\binom{7}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^k(-\sqrt{x})^{7-k}=\pm\binom{7}{k}2^kx^{-k}x^{\frac{7-k}{2}}=\pm\binom{7}{k}2^kx^{\frac{7-3k}{2}}$ (כאשר הסימן נקבע בהתאם לזוגיות/אי-זוגיות k). אנחנו מחפשים מתי $\frac{7-3k}{2}=\frac{1}{2}$, וזה קורה כאשר $k=2$. לכן נציב זאת כדי למצוא את המקדם: $-\binom{7}{2}2^2=-84$.

3. באותו האופן נקבל כי המקדם הוא $\frac{231}{16}$.

4. באותו האופן נקבל כי המספר החופשי הוא 70.

כפל בצמוד

- 1. $\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}=\frac{(4-x)(2-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\frac{(4-x)(2-\sqrt{x})}{4-x}=2-\sqrt{x}$

- $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x+1-4}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x-3}=\sqrt{x+1}+2$

- $$\frac{4-x}{x-\sqrt{3x+4}}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{(x-\sqrt{3x+4})(x+\sqrt{3x+4})}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{x^2-3x-4}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{x^2-3x-4}=$$
$$=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{(x-4)(x+1)}=\frac{-(x+\sqrt{3x+4})}{(x+1)}$$

- $$\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{x\left((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right)}{\left((x+1)^{1/3}-1\right)\left((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right)}=\frac{x\left((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right)}{x}=(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1$$

- $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$

נושאים לחזרה מהתיכון

.1

.I $$\frac{32x^2-2}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{2(4x-1)(4x+1)}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{-2(4x+1)}{2x-7}$$

.II $$\frac{x^2y^2-1}{xy+1}=\frac{(xy-1)(xy+1)}{xy+1}=xy-1$$

.III $$\frac{5a^2-16a+12}{5a^3-a^2-6a}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(5a^2-a-6)}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(a+1)(5a-6)}=\frac{a-2}{a(a+1)}$$

.IV
$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}=\frac{(n^2-m^2)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=$$
$$=\frac{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=(n+m)^2$$

2. נטפל קודם כל בסוגריים השמאליים: המכנה השמאלי מתפרק לפי כפל מקוצר ל- $(3x-1)(3x+1)$ לכן זהו המכנה המשותף ונקבל: $\frac{-5x^2-4x-2+(3x-1)(x-1)+(2x+1)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}$ כלומר $\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}$. כעת נטפל בשבר הימני. המונה הוא $4(9x^2+6x+1)$ וע"י כפל מקוצר נקבל $4(3x+1)^2$. במכנה: רוצים 2 מספרים שמכפלתם -48 וסכומם -13 כלומר הם $-16,3$ לכן הפתרונות הם $x_{1,2}=\frac{-16}{4},\frac{3}{4}=-4,\frac{3}{4}$. כלומר פירוק המכנה הוא $4(x+4)(x-\frac{3}{4})=(x+4)(4x-3)$. כעת נוכל לכפול את שני השברים:

$$\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}\frac{4(3x+1)^2}{(x+4)(4x-3)}=\frac{4x(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

3. אנחנו רוצים לפתור את אי-השוויון $\frac{x^2}{x^2-10x+21}<\frac{4}{7-x}$. נשים לב כי המכנה של צד ימין מתפרק ל- $x^2-10x+21=(x-7)(x-3)$ וע"כ תחום ההגדרה של אי-השוויון הוא $x\neq 3,7$. ראשית נפתור את המשוואה: $\frac{x^2}{(x-7)(x-3)}=\frac{4}{7-x}$ כלומר $\frac{x^2}{(x-7)(x-3)}=\frac{-4}{x-7}$ ע"י מכנה משותף $(x-7)(x-3)$ ונקבל $-4(x-3)=x^2$ כלומר $x_{1,2}=-6,2$. כלומר בהינתן 2 פתרונות אלו ו-2 נקודות בהן אי-השוויון לא מוגדר, קיבלנו סה"כ שהישר הממשי התפצל ל-5 תחומים שבכל אחד מהם נבחר נקודה באופן שרירותי ונבדוק האם אי-השוויון מתקיים שם. על כן ע"י הצבות נקבל שהפתרון הוא $x<-6$ או $2<x<3$ או $7<x$.

.4

.I תחום ההגדרה הוא $-2x^2+6x+1\geq 0$ כלומר $\frac{3-\sqrt{11}}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{11}}{2}$. נפתור ראשית את המשוואה המתאימה ע"י העלאה בריבוע: $\sqrt{-2x^2+6x+1}=2x+1$ כלומר $-2x^2+6x+1=(2x+1)^2$ כלומר $x_{1,2}=0,\frac{1}{3}$. העלנו בריבוע (פעולה לא הפיכה) ע"כ יש לבדוק את הפתרונות ע"י הצבה במשוואה ואכן שניהם מקיימים אותה. נחזור לפתרון אי-השוויון: 2 הנקודות שלנו מפצלות את תחום ההגדרה ל-3 תחומים וע"כ נשאר להציב 3 נקודות מתחומים אלו באופן שרירותי ולבדוק האם אי-השוויון מתקיים שם. הצבה מראה כי הפתרון הוא

. $0<x<\frac{1}{3}$

II. תחום ההגדרה הוא $-5\le x\le 8$. נפתור את המשוואה המתאימה: $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{8-x}$ ע"י העלאה בריבוע: $x+5=1+2\sqrt{8-x}+8-x$. כלומר $\sqrt{8-x}=x-2$ והעלאה נוספת בריבוע תתן $x_{1,2}=-1,4$. יש לבדוק את הפתרונות בגלל פעולת ההעלאה בריבוע – אכן שניהם מקיימים את המשוואה. כעת נחזור לפתרון אי-השוויון: שני הפתרונות מחלקים את תחום ההגדרה לשלושה קטעים. נציב נקודה כלשהי בכל אחד מהקטעים כדי לבדוק אם אי-השוויון מתקיים שם, ונקבל כי הפתרון הוא $-5\le x<4$.