משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 13

תרגיל: פתור ע"י שיטת התמרת לפלס את בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} y''-4y'+8y=e^{2t} \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=5 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל התמרת לפלס על המשוואה:

$$y''-4y'+8y=e^{2t} \quad \Big/ \mathcal{L}\{\cdot\}$$

$$\mathcal{L}\{y''-4y'+8y\}(s)=\mathcal{L}\{e^{2t}(s)\}$$

הערה:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)=\frac{1}{s-\lambda}}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}+8\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s-2}$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-4\left[sY(s)-y(0)\right]+8Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$s^2Y(s)+2s-5-4sY(s)-8+8Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$(s^2-4s+8)\cdot Y(s)=\frac{1}{s-2}-2s+13 \longrightarrow$$ **הערה:** זו לא מ. דיפרנציאלית

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)(s^2-4s+8)}-\frac{2s}{s^2-4s+8}+\frac{13}{s^2-4s+8} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$$

כעת נפעיל את התמרת לפלס ההפוכה לקבל פתרון המפורש:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s^2-4s+8)}-\frac{2s}{s^2-4s+8}+\frac{13}{s^2-4s+8}\right\}(t)\overset{\text{לינאריות}}{=}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{(s-2)(s^2-4s+8)}}_{I}\Big\}-2\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{s}{s^2-4s+8}}_{II}\Big\}+\frac{13}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{2}{s^2-4s+8}}_{III}\Big\}$$

נתחיל בחישוב III:

$$\frac{2}{s^2-4s+8}=\frac{2}{(s-2)^2+4}=\frac{2}{(s-2)^2+2^2}=\mathcal{L}\{\sin(2t)\}\underset{\text{עק' הזזה}}{(s-2)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4s+8}\right\}=e^{2t}\sin(2t)$$

כעת נחשב את II:

$$\frac{s}{s^2-4s+8} = \frac{s}{(s-2)^2+2^2} = \frac{s-2+2}{(s-2)^2+2^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2+2^2} + \frac{2}{(s-2)^2+2^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2}\right\} = e^{2t}\cos(2t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+2^2}\right\} = e^{2t}\sin(2t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4s+8}\right\} = e^{2t}\left(\cos(2t)+\sin(2t)\right)$$

נחשב כעת את I: נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{(s-2)\underbrace{(s^2-4s+8)}_{\text{לא מתפרק מעל } \mathbb{R}}} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2-4s+8}$$

לאחר מכנה משותף נשווה מונה למונה ונקבל:

$$A(s^2-4s+8)+(Bs+C)(s-2) = 1$$

עבור הצבה של $s=2$ נקבל

$$\boxed{A=\frac{1}{4}} \Leftarrow 4A=1$$

נשווה מקדמים:

s^2: $\quad \frac{1}{4}+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{4}}$

s: $\quad -1+\frac{1}{2}+C=0 \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$

ונקבל:

$$\frac{\frac{1}{4}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}}{s^2-4s+8} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{s-2}{s^2-4s+8}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s^2-4s+8)}\right\} = \frac{1}{4}\cdot e^{2t} - \frac{1}{4}\cdot e^{2t}\cos(2t)$$

בסה"כ: הפתרון הכללי למד"ר יהיה:

$$y(t) = \mathrm{I} - 2\,\mathrm{II} + \frac{13}{2}\,\mathrm{III} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\cos(2t) - 2\cdot e^{2t}\left(\cos(2t)+\sin(2t)\right) + \frac{13}{2}e^{2t}\sin(2t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{9}{2}\cdot e^{2t}\sin(2t) - \frac{9}{4}e^{2t}\cos(2t)}$$

תרגיל: פתור ע"י התמרת לפלס את הבעיה הבאה,
היעזר בפונקציית הביסייד.

$$\begin{cases} y''(t)=\begin{cases} t(t-1) & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1\end{cases} = f(t) \\ \\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$$

פתרון: בעזרת פונק' הביס"ד נרשום את $f(t)$ באופן הבא:

$$f(t)=t(t-1)\cdot H_{0,1}(t)=t(t-1)\left[H_0(t)-H_1(t)\right]=$$

$$=t(t-1)\left[H(t-0)-H(t-1)\right]=t(t-1)\cdot H(t)-t(t-1)\cdot H(t-1)$$

הערות: ① $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{H(t)\cdot f(t)\}$ שכן $t<0$ אינו בתחום
בהתמרת לפלס.

② $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$: $n\in\mathbb{N}$

עבור $k\in\mathbb{R}$: $\mathcal{L}\{t^k\}=\dfrac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$

כעת נבצע התמרת לפלס ל-$f(t)$ (רק אגף ימין)

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t(t-1)H(t)\}-\mathcal{L}\{t\cdot(t-1)H(t-1)\}=$$

$$=\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}-\Big(-\frac{d}{ds}\underbrace{\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}}\Big)$$

לצורך חישוב נסמן $g(t)=t$

נעזר בעובדה כי: $\mathcal{L}\{f(t-a)\cdot H(t-a)\}=e^{-as}F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}=\mathcal{L}\{g(t-1)H(t-1)\}=e^{-1\cdot s}G(s)=e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$

בסה"כ נקבל כי:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2} + e^{-s}\cdot\frac{-2}{s^3} =$$

$$= \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s} - 2e^{-s}\cdot\frac{1}{s^3}$$

התמרת לפלס לאגף ימין בנפרד

כעת נפעיל התמרת לפלס על המשוואה המקורית:

$$y''(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s^2 Y(s) - \cancel{sy(0)} - \cancel{y'(0)} = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} - 2e^{-s}\cdot\frac{1}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^5} - \frac{1}{s^4} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s^3} - 2e^{-s}\cdot\frac{1}{s^5}$$

לפי הערה 2 שראינו קודם:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Longrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}}$$

ולכן נשתמש בכך כדי למצוא את $y(t)$:

$$\Rightarrow y(t) = 2\cdot\frac{t^4}{4!} - \frac{t^3}{3!} - \frac{(t-1)^3}{3!}H(t-1) - 2\cdot\frac{(t-1)^4}{4!}H(t-1)$$

והפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{(t-1)^3}{6} - \frac{(t-1)^4}{12} & t > 1 \end{cases}}$$

נבדוק רציפות בנקודת "התפר" $t=1$:

$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \boxed{-\frac{1}{12}}$$

$$\lim_{t\to 1^+} y(t) = \lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{(t-1)^3}{6} - \frac{(t-1)^4}{12}\right) = \boxed{-\frac{1}{12}}$$

* ניתן גם לבדוק כי $y'(t)$ רציפה ב $t=1$.

תרגיל: פתור את המד"ר הבאה:

$$\begin{cases} y''=\begin{cases} 2t & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ 2-2t & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases} = f(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

סמן לצורך נוחות

פתרון: נעזר בפונ' הביסייד לרישום פונקציה המוגדרת למקוטעין:

$$f(t)=2t\,H_{0,\frac{1}{2}}(t)+(2-2t)H_{\frac{1}{2},1}(t)=2t\left[H(t-0)-H(t-\tfrac{1}{2})\right]$$

$$+(2-2t)\left[H(t-\tfrac{1}{2})-H(t-1)\right]=$$

$$=2t\,H(t)+(2-2t-2t)H(t-\tfrac{1}{2})-(2-2t)\,H(t-1)=$$

$$=2t\,H(t)-4(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})+2(t-1)H(t-1)$$

לרישום נסמן $g(t)=t$ ואז

$$f(t)=2g(t)H(t)-4g(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})+2g(t-1)H(t-1)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}=G(s)$$

וכזכור

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-as}\cdot F(s)$$

כעת נתמיר את המד"ר

$$y''=f(t)$$

$$s^2Y(s)-s\cancel{y(0)}^{0}-\cancel{y'(0)}^{0}=2\mathcal{L}\{g(t)H(t)\}-4\mathcal{L}\{g(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})\}+2\mathcal{L}\{g(t-1)H(t-1)\}$$

$$s^2Y(s)=2\cdot e^{-0\cdot s}G(s)-4e^{-\frac{1}{2}s}G(s)+2e^{-1\cdot s}G(s)$$

$$s^2Y(s)=\left(2-4e^{-\frac{1}{2}s}+2e^{-s}\right)\cdot\frac{1}{s^2}\longrightarrow =G(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(2-4e^{-\frac{1}{2}s}+2e^{-s}\right)\cdot\frac{1}{s^4}$$

נפעל התמרת לפלס הפוכה ונקבל:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{2\cdot\frac{1}{s^4}-4e^{-\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1}{s^4}+2e^{-s}\cdot\frac{1}{s^4}\right\}$$

ובפרט $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \Leftarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\} = \frac{t^k}{k!}$

בשימוש בלינאריות של ההתמרה ההפוכה נקבל

$$\boxed{y(t) = 2\cdot\frac{t^3}{6} - 4\cdot\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^3}{6}H\left(t-\frac{1}{2}\right) + 2\frac{(t-1)^3}{6}H(t-1)}$$

הפתרון הכללי. ניתן לבדוק רציפות וגזירות בנקודות התפר.

<u>שאלה ממבחן:</u> לקוח ממבחן תשע"ב מועד א' שאלה 5 (שאלה שה"ית סעיף גם במבחן תשע"ג מועד ב' שאלה 3 ב')

השתמשו בטרנספורם (התמרת) לפלס על מנת לפתור את המשוואה $y''''-y=0$ עם תנאי התחלה $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$, $y'''(0)=0$.

<u>פתרון:</u> ע"י התמרת לפלס נקבל:

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$s^4Y(s) - s^3 - s^2 - s - Y(s) = 0$$

$$(s^4-1)Y(s) = s + s^2 + s^3$$

$$Y(s) = \frac{s+s^2+s^3}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{s+s^2+s^3}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}$$

נרצה לפרק לשברים חלקיים כאשר

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

A, B, C, D קבועים שיש למצוא

ממכנה משותף נדרוש:

$$A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2-1) = s + s^2 + s^3$$

$s=1$: $4A = 3 \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}}$

$s=-1$: $-4B = -1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$

$s=0$: $A - B - D = 0 \Rightarrow D = A - B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

השוואת מקדמים s^3: $A + B + C = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

צ"א קיבלנו:

$$Y(s)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

לפי התמרת לפלס ההפוכה (ולינאריות) נקבל:

$$\boxed{y(t)=\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t}$$

פתרון כללי!

<u>שאלה ממבחן:</u> תשע"ב מועד א' שאלה 2:

ע"י "וריאציית המקדמים", הוכח שהפתרון של הבעיה

$$x''+2x'+2x=f(t) \qquad x(0)=1\,,\ x'(0)=0$$

הוא

$$x(t)=\int_0^t e^{t-t'}\sin(t-t')f(t')dt'+e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))$$

ע"י התמרת לפלס של המשוואה, הוכח שהתמרת הלפלס $X(s)$ של הפתרון $x(t)$ נתונה ע"י

$$X(s)=\frac{F(s)+s+2}{s^2+2s+2}$$

כאשר $F(s)$ היא התמרת הלפלס של $f(t)$. מה ניתן להסיק לגבי התמרת לפלס ההפוכה של $\frac{F(s)}{s^2+2s+2}$?

<u>פתרון:</u> נתמקד בחלק "לפלס" של השאלה. (וריאציית המקדמים בתרגול 4)

נפעיל התמרת לפלס על המשוואה לקבל:

$$s^2X(s)-sx(0)-\cancel{x'(0)}+2(sX(s)-x(0))+2X(s)=F(s)$$

$$(s^2+2s+2)X(s)=F(s)+s+2$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{F(s)+s+2}{s^2+2s+2}=\frac{F(s)}{s^2+2s+2}+\underbrace{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}}_{\mathcal{L}^{-1}:\ e^{-t}\cos(t)}+\underbrace{\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{\mathcal{L}^{-1}:\ e^{-t}\sin(t)}$$

ולכן ניתן להסיק כי:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+2s+2}\right\}(t)=\int_0^t e^{t-t'}\sin(t-t')f(t')dt'}$$

צ"ל $\frac{F(s)}{s^2+2s+2}$ הנו התמרת לפלס של