

## מבחן מועד ב' בקורס 88133

### חשבון אינפיניטסימלי 2

מרצים: ד"ר מיכאל שיין וד"ר רוני ביתן, חומר עזר מותר: מחשבון פשוט, משקל כל שאלה: 20 נקודות.

**יש לענות על חמש שאלות מתוך שש.**

**שאלה 1.** היעזר בחוקי הלוגריתם ובהגדרת האינטגרל המסוים של רימן כדי לחשב את גבול הסדרה:

$$\ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$$

#### שאלה 2.

א. תהיינה  $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$  שתי סדרות פונקציות המוגדרות בקטע  $I$  והמתכנסות במידה שווה

בו. נניח כי שתי הסדרות חסומות במשותף ע"י  $M$  בקטע זה, כלומר:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n(x)| \leq M, |g_n(x)| \leq M$$

הוכח כי גם סדרת המכפלה  $\{f_n(x) \cdot g_n(x)\}$  מתכנסת במידה שווה ב- $I$ .

ב. הראה כי שתי סדרות הפונקציות  $f_n(x) = x, g_n(x) = \frac{1}{n}$  מתכנסות במידה שווה בקטע  $[0, \infty)$

אך הסדרה  $\{f_n(x) \cdot g_n(x)\}$  אינה מתכנסת במידה שווה שם. כיצד אין זה סותר את סעיף א'?

**שאלה 3.** הראה כי:  $\forall x, y \in [-1, 1] : |\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|$ .

**שאלה 4.** קבע עבור אילו ערכי  $\alpha \geq 0$  האינטגרלים הבאים מתכנסים:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ,  $\int_1^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ .

**שאלה 5.** הצג את המספרים:  $e, \ln 2, \pi$  כסכום של טור מספרים רציונליים.

**שאלה 6.** קבע היכן הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x-1)^n$  מתכנס במידה שווה והיכן סכומו הוא פונקציה רציפה. נמק!

**בהצלחה !**