תירגול 5 - אינטגראלים מוכללים (לא אמיתיים)

23 באפריל 2014

קיימים 2 סוגים של אינטגראלים מוכללים:

1. אינטגראל על קטע לא סופי
2. אינטגראל על פונקציה לא חסומה

אינטגראל מוכלל מסוג ראשון

הגדרה: יהא $a \in \mathbb{R}$ תהא $f(x)$ פונקציה אינטגראבלית בכל קטע מהצורה $[a.b]$כאשר $b > a$.
נסמן $I(b) = \int_a^b f(x)dx$.
אם קיים הקבול $\lim_{b\to\infty} I(b)$נאמר ש $f(x)$ אינטגראבלית ב $[a,\infty)$ ונסמן $\int_a^\infty f(x)dx$
אחרת נאמר ש $\int_a^\infty f(x)dx$לא קיים/מתבדר.
דוגמאות:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \arctan(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$
2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$
3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{b^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$

תרגיל: הוכח/הפרך אם $f(x)$ רציפה ו $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
פתרון: הפרכה- נגדיר $f(x)$ להיות:
בכל נקודה טבעית $x = n$ $f(n) = 1$
וסביב כל נקודה כזאת נבנה משולש שבסיסו ברוחב 2^{-n}
אזי $\int_0^\infty f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^\infty 2^{-n}\cdot 2^{-1} < \infty$ (סכום המשולשים)
אבל $\lim_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים!
הערה: באותו אופן מגדירים גם

1. $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

דוגמא $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \arctan(x)\Big|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty} -\arctan(a) = \frac{\pi}{2}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$ כאשר c נקודה כלשהיא.

דוגמא: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$

שימו לב שזה שווה ל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty}\arctan(x)\Big|_{-r}^{r}$

אבל זה לא ההגדרה! (במקרה זה לוקחים "גבול סימטרי")

דוגמא $\int_{-\infty}^{\infty} xdx \neq \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} xdx = \lim_{r\to\infty} x^2/2\Big|_{-r}^{r} = \lim_{r\to\infty} 0 = 0$

כי $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_c^{\infty} xdx + \int_{-\infty}^{c} xdx$

תכונות שעוברות כמו אינטגראל מסוים

1. לינאריות
$\int_a^{\infty}[f(x)+\alpha\cdot g(x)]dx = \int_a^{\infty} f(x)dx + \alpha\cdot\int_a^{\infty} g(x)dx$

2. אדטיביות
$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$ לכל $c\in[a,\infty)$

קריטריון השוואה ראשון

אם מתקיים $0\le f(x)\le cg(x)$ עבור 2 פונקציות, ו־ c קבוע בזנב (כלומר החל נכון עבור $x>M$ עבור M מסוים) אז

1. התכנסות g גורר התכנסות f.
2. התבדרות f גורר התבדרות g

דוגמאות:

1. מתקיים $0\le e^{-x^2}\le e^{-x}$ עבור $x>1$. כיוון ש $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ מתכנס
2. $\int_1^{\infty}\frac{e^{\sin(x)}}{x}dx$ מתבדר כי $\frac{e^{\sin(x)}}{x}\ge\frac{e^{-1}}{x}$ ו $\int_1^{\infty}\frac{dx}{e\cdot x}$ מתבדר.

מבחן ההשוואה הגבולי:

אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$ והפונקציות חיוביות אזי

1. $0<c<\infty$ מתכנסים/מתבדרים ביחד
2. $c=0$ התכנסות g גורר התכנסות f. התבדרות f גורר התבדרות g
3. $c=\infty$ התכנסות f גורר התכנסות g. התבדרות g גורר התבדרות f.

התכנסות בהחלט

הגדרה: אינטגראל $\int_a^{\infty} f(x)dx$ יקרא מתכנס בהחלט אם $\int_a^{\infty}|f(x)|dx<\infty$

משפט: התכנסות בהחלט גורר התכנסות

דוגמא $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}dx$ מתכנס כי $\int_1^{\infty}|\frac{\sin(x)}{x^2}|dx \le \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx<\infty$

מבחן האינטגאל:

f חיובית יורדת אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ מתבדרים /מתכנסים יחד

הוכח כי : $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$ מתבדר

הוכחה: האינטגראל מתנכנס אמ"מ $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$ מתכנס אמ"מ (מבחן העיבורי) $= \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k\ln(2^k)}$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2)\cdot k}$ מתכנס אבל ידוע שמתבדר.

מבחן דריכלה

$g(x)$ רציפה $|G(b) = \int_a^b g(x)dx| < C$ לכל b, $f(x)$ מונוטונות ,גזירה ברציפות, יורדת לאפס (כאשר $x \to \infty$)

אזי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

דוגמא $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$-

כיוון ש $|G(b) = \int_a^b \sin(x)dx| = |-\cos(b)+\cos(a)| \leq 2$

וגם $f(x) = \frac{1}{x}$ מונוטונות ,גזירה ברציפות, יורדת לאפס

תרגיל: האם $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ מתכנס בהחלט?

פתרון : לא. מתקיים : $\sin^2(x) \leq |\sin(x)|$. נראה כי $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx$מתבדר:

$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx = -1/2 \cdot \int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}dx + 1/2\int_1^\infty \cdot\frac{1}{x}dx$

כיוון ש $\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}dx$ מתכנס (שוב, לפי דריכלה) ו $1/2\int_1^\infty \cdot\frac{1}{x}dx$ מתבדר נקבל כי $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx$ מתבדר.

אינטגראל מוכלל מסוג שני

הגדרה: תהא $f(x)$ המקיימת

1. לא חסומה בסביבה ימנית של a.
2. אינטגראבילית בכל קטע $[a+\epsilon, b]$
3. נסמן $I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} I(\epsilon)$ אזי נאמר כי $f(x)$אינטג' בקטע $[a,b]$ ונסמן $\int_a^b f(x)dx$

הערה באותו אופן אם $f(x)$ לא חסומה בסביבה שמאלית של b אזי נגדיר $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$

דוגמאות:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_{0+\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \ln(x)\Big|_\epsilon^1 = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \ln(\epsilon) = -\infty$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\epsilon^1 = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{1-\alpha}[1-\frac{1}{\epsilon^{\alpha-1}}] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1 \\ \infty & \alpha>1 \end{cases}$

משפטי ההשוואה עובדים גם כאן:

משפט: אם $0 \le f(x) \le g(x)$ ב$[a,b]$ ולא חסומות בסביבה ימנית של a אזי:

1. אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)dx$

2. אם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^b g(x)dx$

משפט: אם $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ אזי

1. $0 < c < \infty$ מתכנסים/מתבדרים ביחד

2. $c = 0$ התכנסות g גורר התכנסות f. התבדרות f גורר התבדרות g.

3. $c = \infty$ התכנסות f גורר התכנסות g. התבדרות g גורר התבדרות f.

תרגיל : קבע האם האינטגראל $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

פתרון: כן -

עבור $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ נשווה עם $\frac{1}{x^{3/2}}$ שמתכנס

עבור $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ נשווה עם $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ שמתכנס

תרגיל: לאילו ערכי α האינטגראל $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(x)dx$ מתכנס?

פתרון: נשווה את $f(x) = \cos^\alpha(x)$ עם $g(x) = (\pi/2 - x)^\alpha$

$\lim\limits_{x\to\pi/2^+} \frac{\cos(x)}{(\pi/2-x)} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to\pi/2^+} \frac{-\sin(x)}{-1} = 1$

ולכן $\lim_{x\to\pi/2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ולכן הם מתבדרים/מתכנסים ביחד.

כעת, $\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - x)^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}(\pi/2 - x)^{\alpha+1}\Big|_0^{\pi/2}$ וזה מוגדר אמ"מ $\alpha + 1 > 0$.

תרגיל קבע האם האינטגראל $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x}dx$

פתרון: נציב $t = 1/x$ ואז $\int_\infty^1 t \cdot \cos(t)(-\frac{1}{t^2}dt) = \int_1^\infty \cos(t)\frac{dt}{t} < \infty$ לפי דריכלה.

תרגיל : בדוק האם האינטגראל $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ מתכנס

פתרון: נגדיר $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ גם 0 וגם 1 נקודות בעייתיות - נפצל לשני אינט' $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

נבדוק את I_1: כיוון ש $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(x)} = 1$ מספיק לבדוק $\int_0^{1/2} \ln(x)dx$ כיוון ש $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/\sqrt{x}} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/2\sqrt{x}x} = 0$

כיוון ש $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס - גם $\int_0^{1/2} \ln(x)dx$ מתכנס.

נבדוק את I_2: $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ולכן הוא חבר לאינטגראל של $g(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}$

אבל $0 = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1/x}{-1/2\sqrt{1-x}} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ ולכן $g(x)$ רציפה ב $[1/2, 1]$ ולכן אינטג' שם.