תרגיל

תהא $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה(גזירה ∞ פעמים) ותהי $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ עקומה, המוגדרת ע"י

$$\gamma\left(s\right)=\left(\int_0^s\cos\left[\phi\left(u\right)\right]\,\mathrm{d}u,\int_0^s\sin\left[\phi\left(u\right)\right]\,\mathrm{d}u\right)$$

א. הוכיחו כי העקומה γ נתונה בפרמטריזציה טבעית(כלומר, השימוש באות "s" מוצדק)

ב. חשבו את עקמומיות העקומה γ.

ג. מצאו עקומה $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ בפרמטריזציה טבעית המקיימת $\alpha\left(0\right)=0$ ועקמומיותה היא $\kappa\left(s\right)=s$ לכל s.

פתרון

א. נגזור:

$$\gamma'\left(s\right)=\left(\cos\left[\phi\left(s\right)\right],\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\right)$$

$$\left\|\gamma'\left(s\right)\right\|=\sqrt{\cos^2\left[\phi\left(s\right)\right]+\sin^2\left[\phi\left(s\right)\right]}\equiv1$$

ב. נשתמש במשוואת פרנה הראשונה $\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}s}=\kappa\cdot\hat{N}$.[1]

$$\hat{T}\left(s\right)=\gamma'\left(s\right)=\left(\cos\left[\phi\left(s\right)\right],\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}s}\equiv\hat{T}'\left(s\right)\equiv\gamma''\left(s\right)=\left(-\phi'\left(s\right)\sin\left[\phi\left(s\right)\right],\phi'\left(s\right)\cos\left[\phi\left(s\right)\right]\right)$$

$$\hat{N}\left(s\right)=R_{90^\circ}\hat{T}\left(s\right)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\left[\phi\left(s\right)\right]\\\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\\\cos\left[\phi\left(s\right)\right]\end{bmatrix}$$

(תזכורת: $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}s}\left(s\right)=\kappa\cdot\hat{N}\left(s\right)$$

$$\begin{bmatrix}-\phi'\left(s\right)\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\\\phi'\left(s\right)\cos\left(\phi\left(s\right)\right)\end{bmatrix}=\kappa\cdot\begin{bmatrix}-\sin\left[\phi\left(s\right)\right]\\\cos\left[\phi\left(s\right)\right]\end{bmatrix}$$

[1] המשוואה השנייה היא $\frac{\mathrm{d}\hat{N}}{\mathrm{d}s}=-\kappa\cdot\hat{T}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\kappa(s) = \phi'(s)}$$

ג. רוצים עקומה α, עם עקמומיות $\kappa(s) = s$. ע"פ הסעיפים הקודמים:

$$\kappa(s) = \phi'(s)$$

$$s = \phi'(s)$$

נוציא $\int \mathrm{d}s$:

$$\phi(s) = \frac{s^2}{2}$$

נטען ש:

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos\left[\frac{u^2}{2}\right]\,\mathrm{d}u, \int_0^s \sin\left[\frac{u^2}{2}\right]\,\mathrm{d}u\right)$$

קל לראות כי $\alpha(0) = 0$:

$$\alpha(0) = (0,0)$$

$$\hat{T}(s) = \alpha'(s) = \left(\cos\left(\frac{s^2}{2}\right), \sin\left(\frac{s^2}{2}\right)\right)$$

$$\hat{T}(0) = (1,0)$$

תרגיל

תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ איזומטריה של המישור. נגדיר עקומה חדשה $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ע"י

$$\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$$

מצאו קשר בין העקמומיות של $\tilde{\gamma}$לבין זו של γ.

פתרון

ידוע שF היא מהצורה $F(x) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ עבור A אורתוגונלית, ולכן

$$\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) = A \cdot \gamma(t) + b$$

נגזור:

$$\tilde{\gamma}'(t) = A \cdot \gamma'(t)$$

$$\tilde{\gamma}''(t) = A \cdot \gamma''(t)$$

נקרא לעקמומיות של $\tilde{\gamma}$ $\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} | & | \\ \tilde{\gamma}'(t) & \tilde{\gamma}''(t) \\ | & | \end{array} \right]}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} | & | \\ A \cdot \gamma'(t) & A \cdot \gamma''(t) \\ | & | \end{array} \right]}{\|A \cdot \gamma'(t)\|^3} =$$

$$= \det \left[A \cdot \left[\begin{array}{c|c} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{array} \right] \right] \cdot \frac{1}{\|A \cdot \gamma'(t)\|^3} = \frac{\det A \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{array} \right]}{\|A \cdot \gamma'(t)\|^3} = \cdots$$

נזכור שA אורתוגונלית, כלומר $A^T A = I = A \cdot A^T$ ולכן:

$$\cdots = \det A \cdot \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{array} \right]}{[\gamma'(t)]^3} = \det A \cdot \kappa(t) = \pm 1 \cdot \kappa(t)$$

לסיכום

$\tilde{\kappa} = \kappa$ אם $\det A = 1$ - A שומרת אוריינטציה.

$\tilde{\kappa} = -\kappa$ אם $\det A = -1$ - A לא שומרת אוריינטציה.

עקומות מרחביות

הפעם 3 וקטורים חשובים: יש לנו את $\hat{T}$ ואת $\hat{N}$, אבל גם את $\hat{B}$ שמאונך לשניהם.
משוואות פרנה אומרות:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

כאשר:

- κ זה העקמומיות ־ מודדת כמה העקומה עקומה.
- וτ זה הפיתול ־ מודד כמה העקומה אינה מישורית.

תרגיל

הוכיחו שאם פונקציית הפיתול τ מתאפסת זהותית אזי γ היא מישורית.

פתרון

נתון $\tau\left(s\right)\equiv0$. לפי משוואת פרנה השלישית:

$$\hat{B}'=0\implies\hat{B}\equiv\overrightarrow{\text{const}}$$

נגדיר פונקציה:

$$f\left(s\right)=\left\langle \gamma\left(s\right)-\gamma\left(0\right),\hat{B}\right\rangle$$

$$f\left(0\right)=\left\langle \gamma\left(0\right)-\gamma\left(0\right),\hat{B}\right\rangle=0$$

$$f'\left(s\right)=\left\langle \gamma'\left(s\right),\hat{B}\right\rangle+\underbrace{\cancel{\left\langle \gamma\left(s\right)-\gamma\left(0\right),\hat{B}'\right\rangle}}_{=0}=\left\langle \hat{T}\left(s\right),\hat{B}\left(s\right)\right\rangle\overset{\hat{T}\perp\hat{B}}{=}0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases}f'\equiv0\implies f=\text{const}\\ f\left(0\right)=0\end{cases}$$

$$f\left(s\right)\equiv0\implies\left\langle \gamma\left(s\right)-\gamma\left(0\right),\hat{B}\right\rangle\equiv0\to\gamma\left(s\right)-\gamma\left(0\right)\perp\hat{B}$$

כל זה אומר שγ נמצאת כולה במישור שמאונך ל$\hat{B}$

משטחים

משטח M הוא תת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$ שנראית, מקומית, כמו מישור. הכוונה היא שניתן לכסות את כולו ע"י "מפות".

מפה היא פונקציה $\varphi:U\to M$ כאשר u תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^2$. φ צריכה להיות חח"ע ו**חלקה**.

אוסף מפות $\left\{\varphi_i\right\}_i$ המכסה את כל M נקרא אטלס.

תרגיל

מצאו אטלס עבור הגליל:

$$M=\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2=1\right\}$$

פתרון

$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to M$$

$$\varphi_1 (u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\varphi_2 : (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to M$$

$$\varphi_2 (u, v) = (\cos (u + \pi), \sin (u + \pi), v)$$

$\{\varphi_1, \varphi_2\}$ הם אטלס עבור הגליל.