מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' נתן נתניהו
תאריך: 2018-12-12

עיבוד תמונות
89-560-01

Hough Transform - המשך

תזכורת: יצאנו מסט של פיקסלי שפה, ולכל פיקסל שפה שאלנו מי הפרמטרים שמקיימים משוואת ישר $y = mx+c$ שעובר דרך אותה נקודה. יש איזושהי דיסקרטיזציה (הרזולוציה משחקת תפקיד) כי הגיאומטריה לא בדיוק נקייה.

כדי לאפיין מעגל, צריך 3 פרמטרים: שתי הקואורדינטות של המרכז (a,b) והרדיוס r כדי לקיים משוואת מעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ המשוואות הפרמטריות הן:

$$x = a + r\cos\theta \qquad y = b + r\sin\theta$$

או

$$a = x - r\cos\theta \qquad b = y - r\sin\theta$$

האלגוריתם הזה מאוד לא יעיל - הסיבוכיות שלו הוא $O\left(n^5\right)$[1]. כדי לשפר אותו אפשר להשתמש בגרדיינט: הגרדיינט בנקודה ספציפית הוא הכיוון של ישר הרדיוס. כל פיקסל שפה הוא בעצם (x_i,y_i,θ_i). לכן אפשר להחליף את הפרמטר r (בעצם "להעביר" את "דרגת החופש" הזאת לפיקסלי השפה) ולקבל:

$$b = a\tan\theta - x\tan\theta + y$$

אם מסתכלים על כל מרכז מעגל $\left(\hat{a},\hat{b}\right)$, אפשר לבצע עליו עוד Hough:

$$\left(x_i-\hat{a}\right)^2+\left(y_i-\hat{b}\right)^2 \approx r^2$$

[1] לעבור על כל x,y,a,b,r.

עיבוד תמונה במישור התדר

תמונה זה אות דו־מימדי שאנחנו מסתכלים עליו במרחב. איך מסתכלים על זה במישור התדר?
ולמה בכלל להסתכל על מישור התדר? בגלל שאפשר לעשות כל מיני שינויים במישור התדר ולתרגם אותם בחזרה למישור התמונה.

טורי פוריה Fourier Series

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית בעלת מחזור T ומספר סופי של נקודות אי־רציפות. כמו כן $|f(x)|^2$ הינה אינטגרבילית באופן מחולט, ז"א:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$$

אזי $f(x)$ ניתן לפירוק ע"י טורי פוריה באופן הבא:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot 2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \cdot 2\pi f_0 x)$$

באשר:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \cos(n \cdot 2\pi f_0 x) \, \mathrm{d}x$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \sin(n \cdot 2\pi f_0 x) \, \mathrm{d}x$$

$$f_0 = \frac{1}{T} \qquad A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \, \mathrm{d}x$$

A_0 קרוי גם בשם "רכיב הDC" (מבטא ממוצע)

יש כאן בעצם אינסוף תדרים, כאשר לכל תדר יש אמפליטודה דו מימדית (A_n, B_n).
מה שבעצם קורה זה שמחברים כמה גלי סינוס בתדרים שונים כדי לקבל קירוב ששואף לפונקציה המקורית ככל שמוסיפים יותר גלים.
שינוי חד באות פירושו שמבחינת ההרכב הספקטרלי הוא מכיל הרבה מאוד תדרים, כי יש הרבה פונקציות שמתווספות כדי לבצע שחזור עד כמה שאפשר מדוייק.

התמרת פוריה חד־מימדית

הגדרות:

- התמרת פוריה של פונקציה $f(x)$ ממשית רציפה $\mathcal{F}(f(x))$ מוגדרת ע"י

$$F(w) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi w} \, \mathrm{d}x$$

נשים לב שw הוא התדר, וi כאן הוא לא מונה אלא המספר המדומה $i = \sqrt{-1}$.

- התמרת פוריה ההופכית של $F(w)$ היא הפונקציה $f(x)$:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(w)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i2\pi wx} \, \mathrm{d}w$$

רכיבי התדר

- אמפליטודה (גודל, עצמה):
-

$$\left|F\left(w\right)\right|=\sqrt{R\left(w\right)^{2}+I\left(w\right)^{2}}$$

- פאזה:

$$\phi\left(w\right)=\arctan\left(\frac{I\left(w\right)}{R\left(w\right)}\right)$$

כאשר $R\left(w\right)$ זה החלק הממשי של w ו-$I\left(w\right)$ זה החלק המדומה.