## נלפוטנטיות

הגדרה: יהי $(R,+,\cdot,0)$ חוג. איבר $x\in R$ נקרא נלפוטנטי אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $x^n=0$.

דוגמא: $2\in\mathbb{Z}_4$, או המטריצה $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

תרגיל: יהי $(R,+,\cdot,0)$ חוג. נניח שקיימים $a,b\in R$ כך ש־ $ab\in R$ איבר נילפוטנטי.
הוכיחו: $ba$ נלפוטנטי.

פתרון: נתון שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $(ab)^n=0$. נשים לב שמתקיים:

$$(ba)^{n+1}=b(ab)^n a=b\cdot 0\cdot a=0$$

ולכן לפי הגדרה $ba$ נלפוטנטי.

## מאפיין של חוג

הגדרה: המאפיין של חוג הוא $n$ המינימלי כך ש־ $1+1+\ldots+1=n\cdot 1=0$, ואם אין כזה אז המאפיין הוא 0.

דוגמאות: המאפיין של הרציונאליים הוא 0, ושל $char(\mathbb{Z}_n)=n$.

## הומומורפיזמים

תרגיל. הוכיחו או הפריכו: אם $R_1,R_2$ חוגים עם חילוק אז $R_1\times R_2$ גם חוג עם חילוק.

פתרון: הפרכה: לשם כך ניזכר באיזו' מחבורות: $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\cong\mathbb{Z}_6$. זהו גם איזו של חוגים.

## תתי חוגים ואידיאלים

יהי $R$ חוג. תת קבוצה $S\subseteq R$ שהיא גם חוג נקראת תת־חוג. מספיק לבדוק:

- תנאי תת־חבורה על חיבור: $\forall a,b\in S: a-b\in S$.
- סגירות לכפל: $\forall a,b\in S: ab\in S$.

דגומאות:

- $GL_n(\mathbb{R})\subseteq M_n(\mathbb{R})$ לא תת חוג, כי $I_n-I_n=0\notin GL_n(\mathbb{R})$.
- $\left\{\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}\leq M_2(\mathbb{R})$.
- $\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}\leq M_2(\mathbb{R})$. מה שמעניין בדוגמא זו, שלשני החוגים יש יחידה, אך היא לא אותה יחידה.

## אידיאלים

כעת נדבר על חוגים קומוטטיבים. ישנם תתי־חוגים מיוחדים, שמתקיימת בהם בליעה עבור הכפל. קוראים להם אידיאלים: תת־חוג $I \leq R$ נקרא אידיאל אם:

$$\forall r \in R, i \in I : ri \in I$$

ומסמנים: $I \trianglelefteq R$.

דוגמא: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ פולינום מעל השדה $\mathbb{F}$. אזי קבוצת הכפולות שלו: $\langle f \rangle = \{fg : g \in \mathbb{F}[x]\}$ היא אידיאל: הוכחה: יהיו $fg_1, fg_2 \in \langle f \rangle$ אזי: $fg_1 - fg_2 = f(g_1 - g_2) \in \langle f \rangle$, וכן: $(fg_1)(fg_2) = f(g_1 f g_2) \in \langle f \rangle$. לכן זהו תת־חוג. בליעה: יהיו $fg \in \langle f \rangle, h \in \mathbb{F}[x]$, אזי: $fg \cdot h = f \cdot gh \in \langle f \rangle$.

תרגיל: יהי $R$ חוג חילופי, ויהי $N$ אוסף האיברים הנילפוטנטיים. הוכיחו: $N \trianglelefteq R$.

הוכחה: יהיו $a, b \in N$ אזי: קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש־$a^n = b^m = 0$. ולכן:

$$(a-b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}$$

כעת, אם $k \geq n$ אז $a^k = 0$, ולכן כל המחובר מתאפס, ואחרת $k < n$ ולכן $n+m-k > m$ ואז $b^{n+m-k} = 0$ וגם כל המחובר מתאפס. ולכן קיבלנו $\sum_{k=0}^{n+m} 0 = 0$.