בוחן בדידה 88-195

25.7.2022, כ"ו תמוז תשפ"ב

מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת־קורן, הדר קנר, אושרית שטוסל, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- משך הבוחן: שעה ללא הארכות זמן, שעה וחצי כולל הארכות זמן.
- יש לענות על כל השאלות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ללא חומר עזר, גם לא מחשבון.
- ניקוד מקסימלי: 110.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (20 נק') יהיו A,B פסוקים. נגדיר סדרה של פסוקים: $P_1 = A$, $P_2 = B$, ולכל $n \geq 3$ נגדיר:

$$P_n = (B \to P_{n-2}) \vee (P_{n-1} \to A) \ .$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל $n \geq 4$ זוגי, P_n הוא טאוטולוגיה (כלומר, ערך הפסוק הוא אמת ללא תלות בערכי האמת של A,B).

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על הטבעיים הזוגיים הגדולים או שווים ל־4:

- **בסיס האינדוקציה:** נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n=4$:

$$\begin{aligned} P_4 &= (B \to P_2) \vee (P_3 \to A) \\ &\equiv (B \to B) \vee (P_3 \to A) \end{aligned}$$

ניזכר כי $\mathsf{T} \equiv B \to B$ ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} P_4 &\equiv (B \to B) \vee (P_3 \to A) \\ &\equiv (B \to B) \vee (P_3 \to A) \\ &\equiv \mathsf{T} \vee (P_3 \to A) \equiv \mathsf{T} \end{aligned}$$

- **צעד האינדוקציה:** נניח כי הטענה נכונה עבור $k \geq 4$ טבעי זוגי כלשהו, ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+2$:

$$P_{n+2} = (B \to P_n) \vee (P_{n+1} \to A)$$

מהנחת האינדוקציה מתקיים כי P_n טאוטולוגיה, כלומר $P_n \equiv \mathsf{T}$, ולכן:

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= (B \to P_n) \vee (P_{n+1} \to A) \\ &\equiv (B \to \mathsf{T}) \vee (P_{n+1} \to A) \end{aligned}$$

ניזכר כי $\mathsf{T} \equiv B \to \mathsf{T}$ ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= (B \to P_n) \vee (P_{n+1} \to A) \\ &\equiv (B \to \mathsf{T}) \vee (P_{n+1} \to A) \\ &\equiv \mathsf{T} \vee (P_{n+1} \to A) \equiv \mathsf{T} \end{aligned}$$

$\square$

2. (18 נק' כל סעיף) הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A,B,C, אם $A\cap B\subseteq C$ אזי $(A\backslash C)\cap B=\emptyset$.

(ב) לכל שתי קבוצות $A,B\subseteq U$ (U היא קבוצה אוניברסלית), $A\cap B\cap(A\Delta B)^c=A\Delta B$ אם"ם $(A\Delta B)^c=U$.

(ג) לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים כי $A\backslash B\in P(A)\backslash P(B)$.

פתרון:

(א) **הוכחה:** יהיו A,B,C קבוצות כך ש־$A\cap B\subseteq C$. נוכיח ש־$(A\backslash C)\cap B=\emptyset$:
נניח בשלילה כי $(A\backslash C)\cap B\neq\emptyset$, אז יש $x\in(A\backslash C)\cap B$. נבחר x כזה. מתקיים:

$$\begin{gathered}x\in(A\backslash C)\cap B\\ \Downarrow\\ (x\in A\backslash C)\wedge(x\in B)\\ \Downarrow\\ ((x\in A)\wedge(x\notin C))\wedge(x\in B)\\ \Downarrow\\ ((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(x\notin C)\end{gathered}$$

כאשר הגרירה הלוגית האחרונה נובעת מאסוציטביות (קיבוציות) וקומוטטיביות (חילופיות) של הקשר הלוגי $\wedge$.

$$\begin{gathered}((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(x\notin C)\\ \Downarrow\\ (x\in A\cap B)\wedge(x\notin C)\\ \Downarrow\\ x\in(A\cap B)\backslash C\end{gathered}$$

אבל $A\cap B\subseteq C$ ולכן $(A\cap B)\backslash C=\emptyset$, בסתירה. $\square$

(ב) **הפרכה:** ניקח $A=B=\{1\}$, $U=\{1,2\}$. אזי $A\Delta B=\emptyset$ ולכן $(A\Delta B)^c=(\emptyset)^c=U=\{1,2\}$, אבל $A\cap B\cap(A\Delta B)^c=\{1\}\cap\{1,2\}=\{1\}\neq\emptyset=A\Delta B$ (זוהי הפרכה לגרירה הלוגית: $(A\Delta B)^c=U$ גורר $A\cap B\cap(A\Delta B)^c=A\Delta B$).

(ג) **הפרכה:** תהי A קבוצה, ונבחר $B=A$. אזי $A\backslash B=\emptyset$ וכן $P(A)\backslash P(B)=\emptyset$, אבל:

$$A\backslash B\notin P(A)\backslash P(B)=\emptyset\ .$$

3. (18 נק' כל סעיף) יהי R יחס על קבוצה A. נגדיר את יחס ההרכבה על A:

$$R \circ R = \{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A: \ (aRc) \wedge (cRb)\}$$

(א) הוכיחו כי אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R = R \circ R$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $R \circ R$ יחס שקילות, אז גם R יחס שקילות.

פתרון:

(א) נניח כי R יחד רלפקסיבי וטרנזיטיבי. נוכיח ע"י הכלה דו־כיוונית:

- יהי $(a,b) \in R$. כיוון ש־R יחס רפלקסיבי, אזי aRa. לכן, נבחר $c = a$ ונקבל כי $(aRa) \wedge (aRb)$, כלומר $(a,b) \in R \circ R$.
- יהי $(a,b) \in R \circ R$. מהגדרת $R \circ R$, קיים $c \in A$ כך ש־$(aRc) \wedge (cRb)$. כיוון ש־R יחס טרנזיטיבי, נקבל שמתקיים גם aRb, כלומר $(a,b) \in R$.

□

(ב) **הפרכה:** עבור $A = \{1,2\}$ והיחס $R = \{(1,2),(2,1)\}$, מתקיים $R \circ R = \{(1,1),(2,2)\}$ שהוא אכן יחס שקילות (יחס השיוויון הוא יחס שקילות), אך R אינו יחס שקילות (הוא אינו רפלקסיבי/טרנזיטיבי, שכן הזוגות $(1,1),(2,2)$ אינם ביחס).