אינפי 4 - תרגיל 8

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:
   (א) $\iint_{A_1}\frac{dS}{\sqrt{z-y+1}}$ כאשר $A_1=\left\{(x,y,z):x\in[0,1],y\in[0,1],z=y+\frac{x^2}{2}\right\}$.
   (ב) $\iint_{A_2}\left(x^2+y^2\right)dS$ כאשר A_2 הוא פנים החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ עם $z\in[0,1]$.
   (ג) $\int_T\langle F,\hat{n}\rangle\,dS$ כאשר:
      i. $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ ו-T היא גליל $\left\{x^2+y^2=1,z\in[0,1]\right\}$.
      ii. $F(x,y,z)=(1,1,1)$ עם $T=\left\{1-2x^2-5y^2-2xy=z,z\geq0\right\}$.
      iii. $F(x,y,z)=(x,0,1)$ ו-T הוא חלק של המשטח $z=1-x^2$ הנמצא בין המישורים $y=0,z=y$ ומקיים $z\geq0$.

2. יהי R התחום החסום בין הגליל $x^2+y^2=1024$ והמישורים $z=0,z=20$. חשבו את $\iint_R F\cdot n dS$ כאשר $F(x,y,z)=\left(x^3,y^3,z^3\right)$ ו-n נורמל היחידה החיצוני של R.

3. יהי $B(0,R)$ כדור ב-$\mathbb{R}^3$ מרדיוס R. הראה כי כי נפח הכדור שווה למכפלת שטח פניו ב-$\frac{R}{3}$. הצעה: התייחס בתשובתך לנפח של תחום $D\subseteq\mathbb{R}^3$ בדומה לשטח של תחום $\subset\mathbb{R}^2$.

4. מרכז הכובד $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ של יריעה $\mathbb{R}^3\hookrightarrow M$ מוגדר ע"י $\alpha_i=\frac{\iint_T x_i dS}{\iint_T dS}$. הראה כי מרכז הכובד של פני הכדור שרדיוסו R נמצא במרכזו של הכדור.

5. יהי S^2 ספירת היחידה ב-$\mathbb{R}^3$. חשבו את
$$\iint_{S^2}\left(x^2+y+z\right)dS.$$

עובדה. הלפלסיאן Δ הוא אופרטור המוגדר לפי $\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x_1,\ldots,x_n)$ לכל $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

6. יהיו $u,v:D\to\mathbb{R}$ מוגדרות בתחום $D\subset\mathbb{R}^3$ ובעלת שתי נגזרות חלקיות רציפות במ"ש ב-D. יהי T שפת D.
   (א) הראו כי
$$\iiint_D(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,dxdydz=\iint_T uv_n dS$$
   עבור v_n הנגזרת הכיוונית של v בנקודה (x,y,z) על המשטח בכיוון נורמל היחידה החיצוני בנקודה זו.
   (ב) הסיקו בדומה כי
$$\iiint_D(u\Delta v-v\Delta u)\,dxdydz=\iint_T(uv_n-vu_n)\,dS.$$
   (ג) הסיקו כי אם $\Delta u=\Delta v=0$ אז
$$\iint_T uv_n dS=\iint_T vu_n dS.$$

תרגיל. (רשות) יהי $\mathbb{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\right\}$ דיסק היחידה ב-$\mathbb{R}^2$. תהי $u\in C^2(\mathbb{D})$ פונקציה המוגדרת בדיסק הסגור כך ש:

1. $u\mid_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}}\equiv0$.

2. $u \not\equiv 0$.

3. קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש-$\Delta u = -\lambda u$.

הראו כי $\lambda > 0$. הצעה: התבוננו ב$\iint_{\mathbb{D}} \nabla \cdot (u \nabla u)\, dxdy$. דרך אחרת היא לנסות להוכיח באמצעות הטענות בשאלה 6.