שאריות

1

הגדרה: תהי α נקודה סינגולרית של פונקציה f אנליטית בטבעת $r>|\alpha-z|>0$. אזי נסמן

$$Res(f,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

כאשר C היא עקום פשוט סגור בתחום $r>|\alpha-z|>0$ המקיף את הנקודה $z=\alpha$.

יש לשים לב שאם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ הוא הפיתוח של f לטור לורן בטבעת $r>|\alpha-z|>0$ אזי $a_{-1}=Res(f,\alpha)$.

משפט: אם $z=\alpha$ הוא קוטב מסדר m של f אז

$$Res(f,\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-\alpha)^m\right)\right)$$

דוגמא: חשבו את השארית של $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^2}$ ב-$\alpha=\pi$.

פתרון: ל-f יש קוטב מסדר 2 ב-$z=\pi$ ולכן

$$Res(f,\pi)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\pi}\left(\frac{d}{dz}\left(ze^{iz}\right)\right)$$

$$\lim_{z\to\pi}\left(e^{iz}+ize^{iz}\right)=-1-i\pi$$

(2) תרגיל: מצאו את השארית של $f(z)=\dfrac{1+e^z}{z^4}$ ב- $\alpha=0$.

פתרון: ל-f יש קוטב מסדר 4 ב- $\alpha=0$ ולכן

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left(1+e^z\right)$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}e^z=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

תרגיל: מצאו את השארית של $f(z)=\dfrac{z+2}{z^3(z+4)}$ בנקודה $0=\alpha$ ע"י פיתוח לטור לורן.

פתרון:

$$\frac{z+2}{z^3(z+4)}=\frac{1}{4z^3}(z+2)\frac{1}{1+\frac{z}{4}}$$

$$=\frac{1}{4z^3}(z+2)\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}-\frac{z^3}{4^3}\right)$$

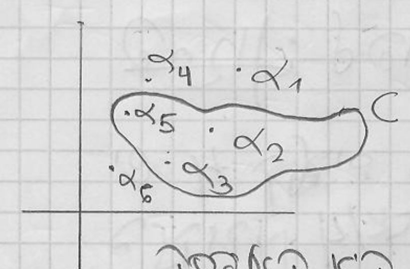
$$=\frac{1}{4z^2}\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\dots\right)+\frac{1}{2z^3}\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\dots\right)$$

$$=\dots+\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\frac{1}{z}+\dots$$

$$\operatorname{Res}(f,0)=-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=-\frac{1}{32}$$ לכן

③ משפט השאריות: יהי R תחום פשוט קשר ויהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ נקודות ב-R ו-f פונקציה אנליטית ב-$R\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. יהי C מסילה סגורה פשוטה ב-R שאינה עוברת דרך $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ אז:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\alpha_i \text{ נמצאות} \\ \text{בתוך } C}} Res(f,\alpha_i)$$



תרגיל: חשבו את האינטגרל

$$\int_C \frac{z+3}{(z-1)(z-2)(z+4)}\,dz$$

כאשר C היא האליפסה

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

~~פתרון:~~ לפונקציה $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)(z-2)(z+4)}$ יש קטבים בנקודות בהן המכנה מתאפס וכאמור $z=1,2,-4$ והן כולן קטבים פשוטים. השאריות בנקודות אלו נמצאות לפי

$$Res(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\frac{z+3}{(z-2)(z+4)}\Bigg|_{z=1}=\frac{-4}{5}$$

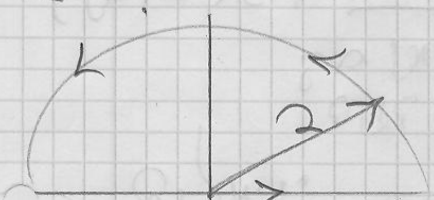
באותו אופן $Res(f,2)=\frac{5}{6}$. את השארית בנקודה $z=-4$ אין צורך לחשב מכיוון שהיא נמצאת מחוץ לאליפסה, לכן נקבל

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}(f,i)+\text{Res}(f,2)\right) = \frac{\pi i}{15}$$

4

פולמוס: חשבו את האינטגרל $\int_C \frac{z^3}{1+z^4}\,dz$

כאשר C הוא חצי המעגל עם מרכז בראשית ורדיוס 2.



פתרון: לפונקציה $\frac{z^3}{1+z^4}$,

יש 4 קטבים פשוטים בהן המכנה מתאפס, כלומר בנקודות $z=e^{ik\pi/4}$ $K=1,3,5,7$. מן הקטבים האלו רק $e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}$ נמצאים בפנים של C

ומתקיים $\text{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \text{Res}(f, e^{3i\pi/4}) = \frac{1}{4}$

לכן האינטגרל שווה ל- $\pi i = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$.

3 פולמוס: חשבו את האינטגרל $\int_{|z|=2} e^{e^{\frac{1}{z}}}\,dz$

פתרון: הפונקציה $e^{e^{\frac{1}{z}}}$ אנליטית בתחום $0<|z|<\infty$

ויש לה פיתוח לטור לורן

$$e^{e^{\frac{1}{z}}} = 1+\frac{1}{1!}e^{\frac{1}{z}}+\frac{1}{2!}e^{\frac{2}{z}}+\dots+\frac{1}{n!}e^{\frac{n}{z}}+\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{2}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^2\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{n}{z}\right)^2 + \dots\right) + \dots$$

לכן המקדם של $\frac{1}{z}$ שווה ל-

$$= \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \dots + \frac{n}{n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e$$

לכן $\displaystyle\oint_{|z|=2} e^{e^{\frac{1}{z}}}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{e^{\frac{1}{z}}}, 0\right) = 2\pi e i$

<u>תרגיל</u>: חשבו את האינטגרל $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin^3 z}$

<u>פתרון</u>: הפונ' $\frac{1}{\sin^3 z}$ אנליטית בתחום $0<|z|\le 1$ ולכן נפתח אותה לטור לורן סביב $z=0$:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots\right)^3}$$

6

$$= \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)\right)^3}$$

כעת נסמן $w = \frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots$ ונשתמש בזהות

$$\frac{1}{(1-w)^3} = 1+3w+6w^2+\dots$$ ונקבל

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3}\left(1+3\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)+6\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)^2+\dots\right)$$

לכן אפשר לראות שהמקדם של $\frac{1}{z}$ שווה ל-$\frac{1}{2}$

ולכן
$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{\sin^3 z} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin^3 z},0\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \pi i$$

<u>דוגמא 8</u>: חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

<u>פתרון</u>: נציב $z=e^{i\theta}$, אזי $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ולכן

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),\ \cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

(7) נכון

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z+z^{-1})^2-\frac{1}{4}(z-z^{-1})^2}\cdot\frac{1}{iz}$$

$$=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{3z^4+10z^2+3}$$

כיוון ש- $3z^4+10z^2+3=(z^2+3)(3z^2+1)$ נקבל

שלפונקציה $f(z)=\frac{4}{i}\frac{z}{3z^4+10z^2+3}$ יש קטבים

פשוטים בנקודות $z=\pm i\frac{\sqrt{3}}{3},\pm i\sqrt{3}$ מתוך רק

הנקודות $z=\pm i\sqrt{3}$ נמצאות בתחום $|z|<1$, לכן

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=2\pi i\frac{4}{i}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=\pi$$