שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 9

תאריך הגשה: 20.06.2012

<u>שאלה 1</u>

יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

<u>שאלה 2</u>

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,\dots,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X.
הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמא נגדית כאשר מדובר באינסוף תתי מרחבים קומפקטיים.

<u>שאלה 3</u>

תהי $p\notin\mathbb{R}$ ויהי $X=\{p\}\cup\mathbb{R}$, תהי $\tau=\left\{O\subseteq X : p\notin O \ \vee\ \left|O^c\right|\le\aleph_0\right\}$

הוכיחו:

א. $x_n \xrightarrow{\tau} x$ אם ורק אם $x_n=x$ לבסוף.

ב. הוכיחו כי $\tau\neq\tau_{disc}$

ג. האם (X,τ) מטריזבילי?

<u>רמז</u>: היעזרו בתרגיל שעשינו בהקשר זה אודות הטופולוגיה הקו-מניה (אפיון סדרות מתכנסות במרחב זה וכדו')

<u>שאלה 4</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה (כאשר לוקחים על $X\times X$ את טופולוגיית המכפלה).

תזכורת – משפט היינה בורל

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי תת מרחב A הוא קומפקטי אמ"מ A (כקבוצה) סגורה וחסומה.

<u>תרגיל 5</u>

א. היעזרו במשפט היינה בורל על מנת להוכיח את **הכללה של משפט ווירשטראס** (Weierstrass): תהי $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אזי f מקבלת מינימום ומקסימום.

יהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ תת המרחב: $A = ([1,5]\times[2,6]) \setminus ((2,4)\times(3,5))$. הוכיחו:

ב. A הוא תת-מרחב קומפקטי וקשיר.

ג. תהי $f: A \to \mathbb{R}$ רציפה. הראו כי קיימים $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(A)=[a,b]$ (כלומר, תמונת f היא קטע סגור).

<u>שאלה 6</u>

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס
ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל- τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל- τ.
ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל-(X,τ_1). אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

<u>בונוס</u>

תהי $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

בְּהַצְלָחָה!