מבוא לאנליזה מתקדמת מועד ב'

עליכם לענות על כל השאלות.
בכל שאלה, הראו את כל הדרך שעשיתם ונמקו כל שלב.
משקל כל שאלה- 20 נקודות.
בהצלחה!

1. פתרו את המשוואה הבאה:

$$z^3 \cdot (1+i) = 2$$

פתרון:

מהשיעורי בית.

2. חשבו את כל הערכים של $(4+4i)^{3i}$.
פתרון:

$$(4+4i)^{3i} = e^{3iL(4+4i)} = e^{3i(\ln\sqrt{32}+\frac{\pi}{4}i+2\pi ki)} = e^{(3\ln\sqrt{32})i-\frac{3\pi}{4}-6\pi k} = e^{(-\frac{3\pi}{4}-6\pi k)}\operatorname{cis}(3\ln\sqrt{32})$$

3. הוכיחו: לכל מס' מרוכב $z \in \mathbb{C}$, מתקיים: $\sin(\pi - z) = \sin(z)$.
פתרון:

$$\sin(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi-z)} - e^{-i(\pi-z)}}{2i} = \frac{e^{\pi i}e^{-iz} - e^{-i\pi}e^{iz}}{2i} = \frac{-e^{-iz} + e^{iz}}{2i} = \sin z$$

השוויון השלישי נובע מהעובדה ש: $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$.

4. בדקו האם הפונקציה הבאה גזירה. במידה והיא גזירה, חשבו את הנגזרת.

$$f(x+iy) = (x^4 - 4xy^3) + i(4x^3y - y^4)$$

פתרון:

נבדוק אם הפונקציה מקיימת את משוואות קושי-רימן.

$U = x^4 - 4xy^3, V = 4x^3y - y^4$

$U_x = 4x^3 - 4y^3$

$U_y = -12xy^2$

$V_x = 12x^2y$

$V_y = 4x^3 - 4y^3$

לא מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$.

לכן הפונקציה אינה גזירה.

5. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$y'' - 2y' - 8y = e^{4x}$$

פתרון:

ראשית, נמצא פתרון כללי למד"ר ההומוגנית המתאימה: $y'' - 2y' - 8y = 0$.

ובכן, המשוואה האופיינית היא: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, ופתרונותיה הם: $\lambda = 4, -2$. לכן הפתרון הכללי להומוגנית שווה ל $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$.

כעת, ננחש פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית. מכיוון שe^{4x} הוא כבר פתרון של ההומוגנית,, ננסה פתרון מהצורה: $y_p = axe^{4x}$.

נגזור: $y_p' = ae^{4x} + 4axe^{4x}, y_p'' = 4ae^{4x} + 4ae^{4x} + 16axe^{4x}$.

נציב: $8ae^{4x} + 16axe^{4x} - 2(ae^{4x} + 4axe^{4x}) - 8axe^{4x} = e^{4x}$.

$6ae^{4x} = e^{4x}$

$a = \dfrac{1}{6}$.

לסיכום, הפתרון הכללי של המד"ר הלא הומוגנית הוא: $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{6} xe^{4x}$.

6. מצאו פתרון כללי למד"ר $y' = yx^2 + x^2 + y + 1$.

פתרון:

זוהי מד"ר פרידה.

$y' = (y+1)(x^2+1)$.

יש פתרון סינגולרי כאשר $y = -1$.

נמצא פתרונות רגילים:

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = (x^2+1)dx$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x^2+1)dx$$

$$\ln|y+1| = \frac{x^3}{3} + x + c$$

נשאיר את התשובה כך.