פתרון תרגיל בית 2 – גאומטריה אנליטית, זהבית צבי

שאלה 1

1. א. בדקו שההגדרה הבאה מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle = x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$$

כאשר $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

פתרון

נבדוק האם מתקי'ימות האקסיומות של המכפלה הפנימית:

1. לינאריות: עבור $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ נחשב:

$$\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = (x_1+y_1)z_1-2(x_1+y_1)z_2-2(x_2+y_2)z_1+5(x_2+y_2)z_2$$

$$= \underbrace{x_1z_1-2x_1z_2-2x_2z_1+5x_2z_2}_{=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}+\underbrace{y_1z_1-2y_1z_2-2y_2z_1+5y_2z_2}_{=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}$$

$$= \langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$$

2. כפל בסקלר: עבור $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ נחשב:

$$\langle\alpha\vec{u},\vec{v}\rangle = (\alpha x_1)y_1-2(\alpha x_1)y_2-2(\alpha x_2)y_1+5(\alpha x_2)y_2$$

$$= \alpha x_1y_1-\alpha 2x_1y_2-\alpha 2x_2y_1+\alpha 5x_2y_2$$

$$= \alpha(x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2) = \alpha\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$$

3. סימטריות (ממשית): עבור $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ נחשב:

$$\langle\vec{v},\vec{u}\rangle = y_1x_1-2y_1x_2-2y_2x_1+5y_2x_2$$
$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$$

לכן $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle$.

4. אי-שליליות/חיוביות: עבור $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ נחשב:

$$\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = {x_1}^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5{x_2}^2 = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 5{x_2}^2$$

נעשה השלמה לריבוע:

$$\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 5{x_2}^2 = \left({x_1}^2 - 2x_1 2x_2 + 4{x_2}^2\right) + {x_2}^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + {x_2}^2 \geq 0$$

זה מתקי'ים תמיד.

כעת $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = (x_1 - 2x_2)^2 + {x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow {x_2}^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ וגם $(x_1 - 2x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 - 2\underbrace{x_2}_{0} = 0$

$\Leftarrow x_1 = 0$, כלומר $\vec{u} = \vec{0}$.

הוכחנו שזו מכפלה פנימית.

<u>שאלה 2</u>

נתון בסיס ל- $\mathbb{R}^3$: $B = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}\right\}$. מצאו בעזרת תהליך גרם-שמידט בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי.

<u>פתרון</u>

שני הוקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ אורתוגונלים כיוון ש- $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1-4+3 = 0$

וגם הוקטורים $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ אורתוגונלים כיוון ש- $\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1-2+1 = 0$,

אבל $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ אינם אורתוגונלים : $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1+2+3 = 6 \neq 0$, לכן זה בסיס שאינו אורתוגונלי.

נמצא באמצעות תהליך גרם שמידט וקטור שלישי, האורתוגונלי לזוג הוקטורים $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$.

ניתן לבחור אחד משני הזוגות של הוקטורים האורתוגונלים. הזוג שנבחר מסיבות חישוב.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{0}{6}}_{=0} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{6}{3}}_{=2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי: $B_0 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}} \right\}$.

נשאר לנו לקבל ממנו בסיס אורתונורמלי.

ננרמל את הוקטורים :

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\left\|\vec{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\left\|\vec{w_2}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3}=\frac{\vec{w_3}}{\left\|\vec{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי $B_1=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_1}},\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_3}}\right\}$.

<u>הערה חשובה :</u> אם הינו בוחרים את הזוג השני הינו מקבלים בסיס אורתונורמלי אחר וזה גם מתקבל.

<u>שאלה 3</u> :

נגדיר מכפלה פנימית (חדשה ממה שאנחנו מכירים, רק לצורך תרגיל זה בלבד) ב- $\mathbb{R}^3$ באופן הבא :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

בדקו האם הבסיס הסטנדרטי הינו אורתונורמלי לפי המכפלה הפנימית החדשה שהגדרנו בתחילת השאלה.

במידה ולא מצאו באמצעותו בסיס אורתונורמלי.

<u>פתרון</u>

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הינו :

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

<u>נחשב</u> : עבור הוקטורים $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקבלים $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{matrix}$ ולכן :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 = 0$$

כלומר , אלו אורתוגונלים תחת המכפלה הפנימית הנתונה.

ועבור $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נקבל $\begin{matrix}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\\y_1=0\\y_2=0\\y_3=1\end{matrix}$ ולכן :

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0=\frac{1}{2}\neq0$$

קיבלנו ששני וקטורים אורתוגונלים לכן נעזר בתהליך גרם שמידט למצוא וקטור שלישי שאורתוגונלי לשניהם :

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot1+0}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot1+0}}_{0}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right\}$.

נשאר לנו לקבל ממנו בסיס אורתונורמלי.

שימו לב יש לחשב את הנורמה לפי המכפלה הפנימית המוגדרת בתרגיל זה ולא לפי המכפלה הסטנדרטית.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_3=0}}{=} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+2\cdot 0+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0}}{=} \sqrt{0+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+2\cdot 1+0} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0 \\ x_3=1}}{=} \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 0+1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

לכן נקבל:

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\left\|\vec{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}_{=1}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\left\|\vec{w_2}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3}=\frac{\vec{w_3}}{\left\|\vec{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}_{=\frac{1}{2}}}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

וקיבלנו בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

שאלה 4

נתונה הקבוצה $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v_1}},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}\right\}$.

מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ באמצעות קבוצה זו.

פתרון

קבוצת הוקטורים הנתונה היא בת״ל, מכיוון שכל הרכיבים של $\vec{v_1}$ שונים מאפס וב- $\vec{v_2}$ הרכיב האמצעי הוא אפס, ואז הוקטורים אינם כפולה בסקלר אחד של השני.
הקבוצה הנתונה אינה אורתוגונלית כיוון ש-

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle=-1+0+4=3\neq 0$$

נבצע תהליך גרם שמידט בכדי להפוך את הקבוצה לאורתוגונלית:

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$$

קיבלנו קבוצה אורתוגונלית: $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{w_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}_{\vec{w_2}}\right\}$

כעת יש לנו שתי דרכים להמשיך את הפתרון:

<u>דרך ראשונה</u>:

נמצא וקטור שלישי האורתוגונלי לשני הוקטורים של הקבוצה האורתוגונלית שמצאנו.

נסמן וקטור כללי $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ונדרוש שיהיה אורתוגונלי לשני הוקטורים שקיבלנו:

$$\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\Rightarrow x+2y+2z=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\rangle=0\Rightarrow\frac{1}{3}(-4x-2y+4z)=0\,\Big|\cdot(-3)\Rightarrow 4x+2y-4z=0$$

קיבלנו 2 משוואות בשלושה נעלמים.

נחסר את המשוואה הראשונה מהמשוואה השניה ונקבל:

$$3x-6z=0\Rightarrow x=2z$$

בסה"כ יש לנו:

$$\begin{cases}x+2y+2z=0\\x=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z+2y+2z=0\Rightarrow 2y+4z=0\Rightarrow y=-2z\\x=2z\end{cases}$$

$z\in\mathbb{R}$ חופשי. נסמן $z=t$ ונקבל: $x=2t,\ y=-2t$ ולכן:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\-2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

לכן קיבלנו וקטור $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ אורתוגונלי לשני הוקטורים האורתוגונלים שמצאנו קודם.

בסה"כ מקבלים קבוצה אורתוגונלית של 3 וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}}\right\}$$

לפי משפט, קבוצה אורתוגונלית שלא מכילה את וקטור האפס היא בת״ל, לכן יש לנו קבוצה אורתוגונלית של 3 וקטורים בת״ל, לכן זה בסיס אורתוגונלי ל- $\mathbb{R}^3$.

ננרמל את הוקטורים בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{w_1}}{\left\|\overrightarrow{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}=\frac{\overrightarrow{w_2}}{\left\|\overrightarrow{w_2}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{16+4+16}}_{=6}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}=\frac{\overrightarrow{w_3}}{\left\|\overrightarrow{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$: $\left\{\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_2}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_3}}\right\}$.

<u>דרך שניה</u>:
נמצא וקטור בת״ל בקבוצה האורתוגונלית שמצאנו ולאחר מכן נפעיל תהליך גרם שמידט בכדי להפוך את הקבוצה לאורתוגונלית.

ניקח איזשהו וקטור מהבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ונבדוק אם מתקבלת קבוצה בת״ל:

למשל, ננסה את הוקטור $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ אכן בת״ל מכיוון ש-

$$\begin{vmatrix}1 & -\frac{4}{3} & 0\\ 2 & -\frac{2}{3} & 0\\ 2 & \frac{4}{3} & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -\frac{4}{3}\\ 2 & -\frac{2}{3}\end{vmatrix}=1\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right)=2\neq 0$$

(שימוש במשפט השקולים – עמודות בת״ל).
פיתחנו את הדטרמיננטה לפי העמודה שלישית.

קיבלנו קבוצה בת״ל של 3 וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$, לכן היא בסיס.
בבסיס זה שני הוקטורים הראשונים אורתוגונלים והשלישי לא אורתוגונלי, כיוון ש-

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=3\neq 0$$

נפעיל תהליך גרם-שמידט ונמצא וקטור שלישי, האורתוגונלי לשני הוקטורים הראשונים.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{9}\cdot 36} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}}, \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}} \right\}$$

ננרמל את הוקטורים בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{w_1}}{\left\|\overrightarrow{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}=\frac{\overrightarrow{w_2}}{\left\|\overrightarrow{w_2}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{16+4+16}}_{=6}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}=\frac{\overrightarrow{w_3}}{\left\|\overrightarrow{w_3}\right\|}=\frac{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\frac{1}{9}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\left\{\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_2}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_3}}\right\}$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$.

<u>שימו לב</u> : קיבלנו אותה תשובה בשתי הדרכים.

שאלה 5

חשבו את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של המטריצות הבאות מעל R . בכל אחד מהמקרים ציינו האם המטריצה לכסינה, במידה וכן רשמו את המטריצה P המקיימת $P^{-1}AP = D$.

א. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ ג. $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

פתרון

א. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

נמצא ערכים עצמים ווקטורים עצמים של המטריצה A :

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס : $|A-\lambda I| = 0$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \,,\, \lambda_2 = 2 \,,\, \lambda_3 = 3$$

המטריצה משולשית ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון הראשי.

קיבלנו ע״ע ממשיים שונים ולכן המטריצה לכסינה.

נמצא את P :

נמצא ו״ע ע״י כך שנפתור את המערכת $(A-\lambda I)v = 0$ לכל ערך עצמי שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ממשוואה ה2 : $y+z=0$. נבחר שרירותית $z=1$ ונקבל $y=-1$.

מהמשוואה הראשונה נקבל : $x=\frac{-y-z}{2}$.

ומכאן וקטור עצמי : $v_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+R_2\to R_3]{R_1-R_2\to R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad z=0\,,\,x+y=0\Rightarrow y=-x$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל $x=-1$ ומכאן וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=3$:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2+R_3\to R_2}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad z=0\,,\,y+z=0\Rightarrow y=0$$

נבחר שרירותית $x=1$ ונקבל מיד וקטור עצמי : $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

לכן המטריצה המלכסנת את A היא $P=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ והאלכסונית המתאימה : $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

כמובן שהיה אפשר לבחור סקלרים אחרים ולקבל תשובה שהיא כפולה של הוקטורים שמצאתי.

ב. פולינום אופייני של A :

$$f_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -4 & -1-\lambda & 0\\ 4 & -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)\left[(\lambda-3)(\lambda+1)+4\right]$$

$$=-(2+\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=-(2+\lambda)(\lambda-1)^2=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1\,,\,\lambda_3=-2$$

כאן פיתחנו לפי שורה שלישית.

נמצא ו"ע:

עבור $\lambda_1=\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix}\underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2+2R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -10 & -3\end{pmatrix}\quad a=-\frac{1}{2}b\,,\,c=-\frac{10}{3}b\,,\,b\neq 0$$

נבחר $b=-6$ ונקבל $a=3\,,\,c=20$ ומכאן מקבלים ו"ע <u>יחיד</u> $(3,-6,20)$ עבור ע"ע בריבוי אלגברי 2, כלומר ריבוי גיאומטרי קטן ממש מריבוי אלגברי והמטריצה לא לכסינה.

ג. פולינום אופייני של B:

$$f_B(\lambda)=|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}8-\lambda & 3 & -3\\ -6 & -1-\lambda & 3\\ 12 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+R_2\to R_1}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2-\lambda & 0\\ -6 & -1-\lambda & 3\\ 12 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -6 & -1-\lambda & 3\\ 12 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3-12R_1\to R_3}{\overset{R_2+6R_1\to R_2}{=}}(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 3\\ 0 & -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 3\\ -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[-(5-\lambda)(4+\lambda)+18\right]$$

$$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2\,,\,\lambda_3=-1$$

כאן פיתחנו לפי עמודה ראשונה לאחר פעולות שורה והוצאת גורם משותף.

נמצא ו"ע:

עבור $\lambda_1=\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix} \underset{R_3-2R_1\to R_3}{\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c=2a+b$$

a,b חופשיים.

נבחר $a=1,b=0$ ונקבל $c=2$ ומתקבל ווקטור עצמי $(1,0,2)$ (הכוונה לוקטור עומד).

ואם נבחר $a=0,b=1$ נקבל $c=1$ ומתקבל ווקטור עצמי $(0,1,1)$ (הכוונה לוקטור עומד)..

הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי (2) בערך עצמי כפול זה, ומכיוון שנותר ע״ע עם ריבוי אלגברי 1, המטריצה לכסינה.

עבור $\lambda_3=-1$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}R_3\to R_3}{\xrightarrow{-\frac{1}{6}R_2\to R_2}} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-9R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3}R_1-R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad a=\frac{1}{2}c\,,\ b=-\frac{1}{2}c\,,\ c\neq 0$$

נבחר $c=2$ ואז $a=1\,,\,b=-1$ ונקבל ו״ע $(1,-1,2)$ (הכוונה לוקטור עומד)..

בסה״כ $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ו- $D=P^{-1}AP$.

ד. נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס : $\left|A-\lambda I\right|=0$.

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -5 & 3-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -2+\lambda & 2-\lambda & 0\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2+R_1\to R_2}{=}}$$

$$=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -2-\lambda & 0 & -1\\ 12+6\lambda & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\cdot\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 12+6\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\left(-1\right)\left[-\left(2+\lambda\right)\left(2-\lambda\right)+12+6\lambda\right]$$

$$=\left(2-\lambda\right)\left(\lambda^2+6\lambda+8\right)=\left(2-\lambda\right)\left(\lambda+4\right)\left(\lambda+2\right)=0\Rightarrow\lambda_1=2\,,\lambda_2=-4\,,\lambda_3=-2$$

כעת נמצא ו״ע : נפתור $\left(A-\lambda I\right)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו.

עבור $\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ -5 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{6}R_3\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\to}}\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_1}{\to}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$-4x=0\Rightarrow x=0$$
$$x-y+z=0\Rightarrow y=z$$

נבחר שרירותית $z=1$ ונקבל מיד $y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי : $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+6R_1 \to R_3]{R_2+5R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{12}R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2 \to R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = y = \frac{1}{2}z$$

נבחר שרירותית $z = 2$ ונקבל מיד $x = y = 1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3 = -2$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-6R_1 \to R_3]{R_2-5R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -x + y = 0 \, , \, z = 0$

נבחר שרירותית $y = 1$ ונקבל מיד $x = 1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.