תרגול 9 – אינפי 1

גבולות של פונקציות

<u>הגדרה – גבול לפי Cauchy</u>

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה a. מספר $L\in\mathbb{R}$ נקרא "גבול של f בנקודה a" אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. בקצרה:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\right).$$

<u>תרגיל</u>

הוכיחו לפי ההגדרה שמתקיים $\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x-1}=4$.

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon>0$. יש למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אזי $|f(x)-4|<\varepsilon$. מתקיים $|f(x)-4|=\left|\frac{x+3}{2x-1}-4\right|=\frac{7|x-1|}{|2x-1|}$. אם $|x-1|<\delta$ אזי $-\delta<x-1<\delta$ ולכן $-2\delta<2x-2<2\delta$ ומכאן $-2\delta+1<2x-1<2\delta+1$.

נניח $\delta<\frac{1}{4}$. אזי $2\delta<\frac{1}{2}$ ← $-2\delta>-\frac{1}{2}$ ← $-2\delta+1>\frac{1}{2}$ ← $\frac{1}{2}<2x-1$ ← $\frac{1}{2}<|2x-1|$.

לכן מתקיים $|f(x)-4|=\frac{7|x-1|}{|2x-1|}<\frac{7\delta}{0.5}=14\delta$.

כעת, יהי $\varepsilon>0$, נבחר $\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{14},\frac{1}{4}\right\}$ ונקבל:

$$|f(x)-4|=\frac{7|x-1|}{|2x-1|}<14\delta<14\cdot\frac{\varepsilon}{14}=\varepsilon.$$

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו לפי ההגדרה שמתקיים $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{2}$.

פתרון

צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $M<0$ כך שלכל $x<M$ מתקיים $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

מתקיים $\left|\frac{7}{4x+6}\right|=\left|\frac{x+5}{2x+3}-\frac{1}{2}\right|$. אנו רוצים שיתקיים $\left|\frac{7}{4x+6}\right|<\varepsilon$ וזה שקול ל- $|4x+6|>\frac{7}{\varepsilon}$.

נניח ש- $x<M<-\frac{6}{4}$ ולכן $|4x+6|=-4x-6$ ולכן $-4x-6>\frac{7}{\varepsilon}$ ומכאן $x<\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$ (*). כדי ש- (*) תתקיים עבור $x<M$ מספיק לקחת $M<\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$.

פורמלית: יהי $\varepsilon>0$, נבחר $\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}=M<\min\left\{\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4},-\frac{6}{4}\right\}$ ולכן $x<M$ ולכן $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

מש"ל

תרגיל

הוכיחו על פי ההגדרה שמתקיים $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$.

פתרון

יש להראות שלכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אזי $f(x)>M$.

מתקיים: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>\frac{x^2+1}{\delta^2}>\frac{1}{\delta^2}=M$ ולכן $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$.

יהי $M>0$. נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ אזי אם $0<|x-1|<\delta$ נקבל: $\frac{1}{(x-1)^2}>\frac{1}{\delta^2}$ ולכן $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)>\frac{1}{\delta^2}\cdot1=M$.

מש"ל

הגדרה – גבול לפי Heine

$L\in\mathbb{R}$ נקרא "גבול של הפונקציה f בנקודה a" אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $a\neq x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}L$.

משפט

שתי ההגדרות של גבול הפונקציה (היינה וקושי) הן שקולות.

תרגיל

הוכיחו שהגבול $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

פתרון

נבחר שתי סדרות המתכנסות לאפס: $\{y_n\}=\left\{\frac{1}{\pi n+\pi/2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

מתקיים: $f(x_n)=\cos(2\pi n)=1\to 1$, $f(y_n)=\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=0\to 0$. לכן, לפי היינה, לפונקציה אין גבול בנקודה $x=0$.

מש"ל

תרגיל

הוכיחו שהגבול $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים.

פתרון

נתבונן בשתי סדרות שמתכנסות לאפס: $\{y_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

מתקיים: $f(x_n)=\frac{1}{n^2}+n\to\infty$, ואילו ל- $f(y_n)=\frac{1}{n^4}+(-1)^n n^2$ אין גבול (שכן יש שני גבולות חלקיים שונים: $\infty,-\infty$). לכן, לפי היינה, לפונקציה אין גבול בנקודה $x=0$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. האם קיימת נקודה $a\in\mathbb{R}$ עבורה הגבול $\lim_{x\to a} g(x)$ קיים?

<u>פתרון</u>

בהינתן שקיימת נקודה כזאת, לפי היינה חייב להתקיים: אם $\{x_n\}\to a$ סדרת רציונאליים, ו- $\{y_n\}\to a$ סדרת אי-רציונאליים (תמיד ישנן סדרות כאלה) אזי $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{n\to\infty} g(y_n)$. כלומר, $\lim_{n\to\infty}(2x_n-1)=\lim_{n\to\infty} {y_n}^2$ ולכן $2a-1=a^2$ ומכאן $a=1$. כלומר, לכל $a\neq 1$ לפונקציה אין גבול בנקודה a.

נוכיח שהגבול ב- $a=1$ אכן קיים ומתקיים $\lim_{x\to 1} g(x)=1$.

על מנת להראות $\lim_{n\to\infty} g(z_n)=1$ מ"ל שאין גבול חלקי של הסדרה השונה מ 1 . נניח בשלילה ש$\lim_{n\to\infty} g(z_{n_k})=L\neq 1$. ל$g(z_{n_k})$ קיימת תת סדרה $g(z_{n_{k_l}})$ כך שכל האיברים $z_{n_{k_l}}$ רציונליים או שקיימת תת סדרה שכל האיברים $z_{n_{k_l}}$ אי רציונליים.

נניח את האפשרות הראשונה אזי: $\lim_{l\to\infty} g(z_{n_{k_l}})=\lim_{l\to\infty} 2z_{n_{k_l}}-1=2-1=1$ (כי $\lim_{l\to\infty} z_{n_{k_l}}=1$). מאידך $\lim_{n\to\infty} g(z_{n_k})=L$ ולכן $\lim_{l\to\infty} g(z_{n_{k_l}})=L\neq 1$ בסתירה ליחידות הגבול. באופן דומה מקבלים סתירה במצב השני ולכן אין גבול חלקי השונה מ1 ו$\lim_{n\to\infty} g(z_n)=1$. נקבל הדרוש עפ"י היינה.

מש"ל

אריתמטיקה של גבולות

<u>תרגיל</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}$

ג. $\lim_{x\to \pi}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}\right)$

<u>פתרון</u>

א. $\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{(x-4)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{(x-4)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{-1}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=-\frac{1}{6}$

ב. <u>תזכורת</u>: 1) תהי $f(x)$ פונקציה אלמנטארית המוגדרת בנקודה $x=a$. אזי $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. 2) הוכחתם בהרצאה שמתקיים $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

<u>בחזרה לתרגיל</u>: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin(7x)}{7x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$.

ג. $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1+\cos x}{\sin(\pi-x)}\right)$

נעשה החלפת משתנים: $t=\pi-x, t\to0$ ונקבל שהגבול הוא:

$\lim_{t\to0}\frac{1+\cos(\pi-t)}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{\sin t}\cdot\frac{t}{t}$. מתקיים $\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$. כמו כן:

$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=0$. לכן התשובה הסופית היא $1\cdot0=0$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מצאו את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

<u>פתרון</u>

ניעזר בנוסחא $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. מתקיים:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}=\frac{2}{3}$$

מש"ל