תרגול 8

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני:

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת וללא חסומה בקטע $[a,b)$. $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$

ונניח כי f אינטגרבילית לכל $t<b$ בקטע $[a,t]$

אזי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ נקרא אינטגרל לא אמיתי מסוג שני, ונאמר כי הוא מתכנס אם

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

מתכנס.

באופן דומה ניתן גם להגדיר $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$

כאשר f אינה חסומה בנק' a.

תכונות:

1. אם f אינטגרבילית לכל $\varepsilon>0$ בקטעים $[a, c-\varepsilon)$
! $(c+\varepsilon, b]$. ונניח כי f אינה חסומה בנק' c.

אם קיימים הגבולות $I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$

! $$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c+\varepsilon} f(x)dx$$

אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ מתכנס ומתקיים

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

הערה: מספיק שאחד מהגבולות I_2, I_1 יתבדר כדי שהאינטגרל כולו יתבדר.

2. האינטגרל $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\alpha < 1$

(בדיוק הפוך מהמצב של אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

תרגילים:

תרגיל: חשבו $\int_0^1 \ln x\, dx$.

נזכר כי הפונק' הקדומה היא $x\ln x - x + c$.

לכן $\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\, dx$

$$\lim_{t\to 0^+} [x\ln x - x]_t^1 = \underbrace{-1 - \lim_{t\to 0^+}(t\ln t - t)}$$

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = -\lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln t}{\frac{1}{t}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} -\lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

לכן האינטגרל הלא אמיתי: $\int_0^1 \ln x\, dx = -1+0-0 \boxed{= -1}$

והאינטגרל מתכנס.

<u>מבחני התכנסות לאינטגרלים חיוביים</u>

מבחן ההשוואה הראשון:

תהיינה f,g פונקציות באותו קטע ועם נק' סי"ג c $(c\in\mathbb{R} / c=\pm\infty)$. ונתון כי f,g אינטגרביליות בכל קטע שלא מכיל את c.

אם מתקיים $0\le g(x)\le f(x)$ לכל נק' בקטע
כי $\int f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int g(x)\,dx$ מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות של האינטגרל $\int_1^\infty x^{-x}dx$.

פתרון: נשים לב כי $x^{-x}\le x^{-2}$ לכל $x\ge 2$

וכיוון שהאינטגרל $\int_2^\infty x^{-2}dx$ מתכנס אזי גם
האינטגרל $\int_2^\infty x^{-x}dx=\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס.

בנוסף ברור כי $\int_1^2 x^{-x}dx$ מתכנס
כיוון ש x^{-x} היא פונקציה רציפה בקטע הסגור $[1,2]$ ולכן האינטגרל

$$\int_1^\infty x^{-x}dx=\int_1^2 x^{-x}dx+\int_2^\infty x^{-x}dx$$

מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות של $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$

פתרון: נשים לב כי $\arctan$ היא (פונקציה) חסומה, מונוטונית עולה וחיובית בקטע $[1,\infty)$.

כיון שהיא מונוטונית עולה אזי לכל $x\geq 1$

$\arctan x \geq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ על לפי מבחן ההשוואה

כיוון שהאינטגרל $\frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{\pi}{4x}$ מתבדר

אזי גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$ מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי:

יהיו f,g פונק' אי שליליות באמצע קטע, עם נק' בעייתית c, ואינטגרבילית בכל קטע שלא מכיל את c.

נניח כי קיים הגבול $L=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

אזי:

1. אם $0\neq L\in R$ אזי $\int f(x), \int g(x)$ בקטע מתכנסים ומתבדרים ביחד (חדרים)

2. אם $L=0$: אם $\int g(x)$ מתכנס אזי $\int f(x)$ מתכנס

3) אם ____ $L=\infty$: אז $\int f(x)$ מתכנס אזי $\int g(x)$
מתכנס.

<u>תרגיל</u>: קבעו התכנסות של $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$

<u>פתרון</u>: נבצע מבחן השוואה בגבול עם $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}{x}=2$$

לכן הם "חברים" וכיוון ש $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}$ מתבדר אזי גם האינטגרל המקורי מתבדר.

<u>תרגיל</u>: קבעו התכנסות של $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-\cos x}$

<u>פתרון</u>: נבצע מבחן השוואה בגבול עם $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

ו $\frac{1}{x^2}$ הוא "חבר" וכיוון ש $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$

<u>מתבדר</u> גם האינטגרל המקורי מתבדר.

תרגיל: קבעו התכנסות של $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

פתרון: יש 2 נק' קריטיות $x=1$, ∞.

לכן נפריד ל-2 אינטגרלים

$$I_1=\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad , \quad I_2=\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

I_1 הוא אינטגרל לא אמיתי מסוג שני עם $x=1$ נק' קריטית.

הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ היא "חבר"

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x\sqrt{x-1}}} \to 1$$

וכיוון ש $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ מתכנס אזי גם $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ מתכנס.

לגבי $I_2=\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$, הוא חבר של $\frac{1}{x^{3/2}}$ וכיוון ש $\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ מתכנס אזי גם האינטגרל I_2 מתכנס. לסה"כ האינטגרל המקורי מתכנס.

תרגיל: קבעו את התכנסות האינטגרל $\int_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}\,dx$

תזכורת: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[5]{x^3}}\cdot\frac{\sin x}{e^{\sin x}-1}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}\left(\sqrt[5]{x^2}\right)\right) = 1$$

לכן $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ הוא חבר של $\int \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}$

וכיוון שהוא מתכנס $\left(\frac{2}{5}<1\right)$ אזי גם האינטגרל המקורי מתכנס.

<u>הערה:</u> לא תמיד נוכל למצוא חבר..

למשל: קבעו התכנסות של $\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$

ננסה לקבוע מבחן השוואה גבולי עם $\frac{1}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^\alpha \ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} -x^{\alpha-1/2}\ln x$$

והגבול הזה $=0$ כאשר $\alpha-1/2>0$ $\alpha>1/2$

לכן אם נבחר $\alpha=3/4$ נקבל כי

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{3/4}}} = 0$$

וכיוון ש $\int\frac{1}{x^{3/4}}$ מתכנס. אזי גם האינטגרל המקורי מתכנס.

תזכורת $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = 0$ לכל $\alpha>0$