אינפי 4 - הרצאה 5

16 באוגוסט 2011

תנאי לאינטגרביליות (לאורך מסילה γ ביחס לרכיב כלשהו γ_j)

אם γ מסילה בעלת אורך ב-$\mathbb{R}^n$, $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה על הקו Γ, אז f אינטגרבילית לאורך γ ביחס לכל רכיב γ_j ומתקיים:

$$\int_\gamma f\left(\overline{x}\right)dx_j=\int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma_j^{'}\left(t\right)dt$$

ההוכחה דומה למשפט המקביל על אינטגרל לאורך מסילה ביחס לאורך המסילה, כאשר כאן משתמשים בנוסחה:

$$\gamma_j\left(d\right)-\gamma_j\left(c\right)=\int_c^d\gamma_j^{'}\left(t\right)dt$$

(עבור γ גזירה ברציפות).

דוגמה

נחשב אינטגרל מסילתי מסוג 2 של פונק' וקטורית:

$$I=\int_\gamma\overrightarrow{F}\overrightarrow{dx}$$

עבור

$$\begin{aligned}F\left(x,\,y,\,z\right) & = & \left(xy,\,xz^{2},\,xyz\right)\\ \gamma\left(t\right) & = & \left(t,\,t^{2},\,t^{3}\right)\\ 0\leq & t & \leq1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{1}\left(t\right) & = & t;\quad\gamma_{1}^{'}\left(t\right)=1\\ \gamma_{2}\left(t\right) & = & t^{2};\quad\gamma_{2}^{'}\left(t\right)=2t\\ \gamma_{3}\left(t\right) & = & t^{3};\quad\gamma_{3}^{'}\left(t\right)=3t^{2}\end{aligned}$$

לכן:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f_1\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_1'\left(t\right)dt+\\
&+ \int_0^1 f_2\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_2'\left(t\right)dt+\\
&+ \int_0^1 f_3\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_3'\left(t\right)dt\\
&= \int_0^1 t^3\cdot 1dt+\int_0^1 t^7\cdot 2tdt+\int_0^1 t^6\cdot 3t^2dt\\
&= \int_0^1 t^3+5t^8dt=\frac{29}{36}
\end{aligned}
$$

יישום פיזיקלי

אם כח קבוע בגודל ובכיוון (שמיוצג ע"י וקטור $\overrightarrow{F}$) מזיז חלקיק לאורך וקטור $\overrightarrow{r}$ אז העבודה שנעשית היא $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}$.
מה יקרה אם $\overrightarrow{F}$ כח משתנה גם בגודל וגם בכיוון, והוא מזיז חלקיק לאורך מסילה γ (ב$\mathbb{R}^2$ או ב$\mathbb{R}^3$)? מה תהיה העבודה במקרה זה?
בשלב הראשון, נניח שהמסילה היא קו שבור (מסילה פוליגונלית) ובכל צלע הכח הוא קבוע ($\overrightarrow{F}^{\,i}$ הוא הכח בין $\gamma\left(t^{i-1}\right)$ ל$\gamma\left(t^i\right)$).
העבודה שכרוכה בהזזת החלקיק מהנק' $\gamma\left(t^{i-1}\right)$ לנק' $\gamma\left(t^i\right)$ היא:

$$\overrightarrow{F}^{\,i}\cdot\left(\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right)$$

כדי להזיז את החלקים לאורך כל המסילה העבודה היא:

$$\sum_{i=1}^k F^i\left(\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right)$$

כעת, אם יש לנו מסילה $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^3$ וכח $F\left(\overrightarrow{x}\right)$ שהוא שדה וקטורי שמשתנה לפי הנק' x.
ניקח חלוקה של הקטע $[a,\,b]$: $P=\left(t^0,\,...,\,t^k\right)$ וניקח $\tau^i\in\left[t^{i-1},\,t^i\right]$.
ניצור את הקו הפוליגונלי שקודקודיו הם $\gamma\left(t^0\right),\,...,\,\gamma\left(t^k\right)$.
בהנחה שלאורך כל צלע הכח קבוע, העבודה הכוללת היא:

$$\sum_{i=1}^k \overrightarrow{F}\left(\gamma\left(\tau^i\right)\right)\cdot\left(\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right)$$

אם P עדינה מספיק, הסכום הנ"ל מקרב את העבודה לאורך γ. לכן, נגדיר את העבודה לאורך γ כך:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr}=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^k \overrightarrow{F}\left(\gamma\left(\tau^i\right)\right)\cdot\left(\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right)$$

דוגמה

נתבונן בכח הנתון ע"י השדה הוקטורי:

$$F(x,\,y,\,z)=(y,\,x,\,z)$$

ונניח שהחלקיק נע לאורך המסילה הסגורה:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= (\cos\theta,\,\sin\theta,\,0)\\ 0\leq\ &\theta\ \leq 2\pi\end{aligned}$$

זו מסילה שתמונתה מעגל היחידה במישור xy.
אזי:

$$\begin{aligned}\gamma_1'(\theta) &= -\sin\theta\\ \gamma_2'(\theta) &= \cos\theta\\ \gamma_3'(\theta) &= 0\end{aligned}$$

אז העבודה היא:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F}\overrightarrow{dx} &= \int_0^{2\pi} f_1(\gamma(\theta))\cdot\gamma_1'(\theta)\,d\theta\\ &+ \int_0^{2\pi} f_2(\gamma(\theta))\cdot\gamma_2'(\theta)\,d\theta\\ &+ \int_0^{2\pi} f_3(\gamma(\theta))\cdot\gamma_3'(\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\sin\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta\\ &+ \int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta+0\\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta-\sin^2\theta d\theta=0\end{aligned}$$

הערה

לפונק' ממשית רציפה יש תמיד פונק' קדומה, לכן המשפט היסודי מתקיים, אבל עבור פונק' וקטורית, אפילו רציפה, לא תמיד ניתן למצוא פונק' קדומה.
למשל:

$$\begin{aligned}f:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ f(x,\,y) &= \left(y,\,x^2\right)\end{aligned}$$

יהיו $\gamma,\,\delta$ שתי מסילות המתחילות ב$(0,\,1)$ ומסתיימות ב$(1,\,0)$:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t,\,1-t)\,,\ t\in[0,\,1]\\ \delta(t) &= (\sin t,\,\cos t)\,,\ t\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned}\gamma^{'}(t) &= (1,\,-1)\\ \delta^{'}(t) &= (\cos t,\,-\sin t)\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr} &= \int_{0}^{1}\left((1-t)\cdot 1+t^{2}\cdot(-1)\right)dt=\frac{1}{6}\\ \int_{\delta}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr} &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}t-\sin^{3}t dt=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

כלומר, למרות ששתי המסילות מתחילות ומסתיימות באותה נק' האינטגרלים עליהן שונים ולכן ברור שאין פונק' קדומה ל-f.

חיבוריות האינטגרל המסילתי מסוג 2

יהיו $\begin{matrix}\gamma: & [a,\,b]\to\mathbb{R}^{n}\\ \delta: & [c,\,d]\to\mathbb{R}^{n}\end{matrix}$ מסילות ב-$\mathbb{R}^{n}$. יהיו $\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{matrix}$ הקווים המתאימים להן.

נניח שהמסילה γ מסתיימת באותה נק' שבה מתחילה המסילה δ, כלומר $\gamma(b)=\delta(c)$.

נגדיר את המסילה $\alpha=\gamma+\delta$ כך:

$$\alpha(t)=\begin{cases}\gamma(t) & a\le t\le b\\ \delta(t+c-b) & b\le y\le b+d-c\end{cases}$$

זוהי מסילה המוגדרת בקטע $[a,\,b+d-c]$.

$\alpha(t)$ רציפה, ולכן מסילה, וצמצומה ל-$[a,\,b]$ נותן את γ וצמצומה ל-$[b,\,b+d-c]$ נותן מסילה שקולה ל-δ.

כעת, אם $\overrightarrow{f}$ פונק' וקטורית רציפה על $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ אז:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_{b}^{b+d-c}}\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{dx} &= \int_{\delta}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}\\ \int_{\alpha_{a}^{b}}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx} &= \int_{\gamma}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}\end{aligned}$$

אבל:

$$\int_{\alpha_{b}^{b+d-c}}\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{dx}+\int_{\alpha_{a}^{b}}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}=\int_{\alpha}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}$$

לכן קיבלנו משפט:

משפט

אם $\gamma,\,\delta$ שתי מסילות בעלות אורך ב-$\mathbb{R}^{n}$, כך ש-γ מסתיימת בנק' שבה δ מתחילה, אז עבור $\overrightarrow{f}$ רציפה על $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ מתקיים:

$$\int_{\gamma+\delta}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}=\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}+\int_{\delta}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}$$

הגדרה

תהי $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^{n}$.
נגדיר לכל $t\in[a,\,b]$:

$$\theta\left(t\right)=b+a-t$$

ונגדיר את המסילה הנגדית לγ:

$$-\gamma=\gamma\circ\theta$$

$-\gamma$ היא אנטי-שקולה לγ (כלומר הרכבה של γ עם פונק' יורדת) ולכן:

$$\int_{-\gamma}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}=-\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}$$

משפט

1. תהי γ מסילה בעלת אורך, Γ הקו המתאים לה.
$\int_{\gamma}$ הוא פונקציונל לינארי על קבוצת הפונק' הוקטוריות הרציפות על Γ (פונק' זו פעולה המקבלת לתוכה פונקציה ומחזירה סקלר).
כלומר:

$$\int_{\gamma}:\ C_{\Gamma}\to\mathbb{R}$$

כאשר C_{Γ} אוסף הפונק' הוקטוריות הרציפות על Γ.
הוא לינארי כי הוא שומר על לינאריות:

$$\int_{\gamma}\overrightarrow{af+bg}\overrightarrow{dx}=a\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}+b\int\overrightarrow{g}\,\overrightarrow{dx}$$

2. תהי γ מסילה בעלת אורך $L\left(\gamma\right)$.
עבור $\overrightarrow{f}:\ \Gamma\to\mathbb{R}^{n}$ נסמן:

$$M=\max\left\{ \left\Vert \overrightarrow{f}\left(x\right)\right\Vert \ \mid x\in\Gamma\right\}$$

אזי:

$$\left|\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{dx}\right|\leq M\cdot L\left(\gamma\right)$$

(זה משפט הערכת האינטגרל, בדומה להערכת אינטגרל רימן).

אי תלוית אינטגרל מסילתי מסוג 2 במסילה, שדה משמר

אחת מגרסאות המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי הוא:

$$\int_{a}^{b}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\cdot\varphi^{'}\left(t\right)dt=F\left(\varphi\left(b\right)\right)-F\left(\varphi\left(a\right)\right)$$

כאשר $F\left(x\right)$ גזירה ו$F^{'}\left(x\right)=f\left(x\right)$ (F קדומה של f), φ גזירה ב$[a,\,b]$.
כאן יש לנו את ההכללה הבאה:

משפט

תהי $\overrightarrow{f} = (f_1, ..., f_n)$ פונק' מ$\mathbb{R}^n$ ל$\mathbb{R}^n$ המוגדרת בתחום $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
נניח שקיימת פונק' $F : D \to \mathbb{R}$ שהיא גזירה ברציפות בD ומקיימת לכל $j = 1, ..., n$ לכל $x \in D$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overrightarrow{x}) = f_j(\overrightarrow{x})$$

כלומר:

$$\overrightarrow{\nabla F} = \overrightarrow{f}$$

תהי $\gamma : [a, b] \to D$ חלקה לחלקים, אזי:

$$\int_\gamma \overrightarrow{f}\overrightarrow{dx} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

הוכחה

נסמן:

$$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$$

אז:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{f}\overrightarrow{dx} &= \sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j^{'}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j^{'}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot \gamma_j^{'}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
\end{aligned}$$

הערות

השתמשנו בכלל השרשרת ובמשפט היסודי. כדי להצדיק שימוש זה, הנגזרות של רכיבי γ, $\gamma_j^{'}$ חייבות להיות רציפות, לכן דרשנו מסילה חלקה במשפט (אם היא חלקה לחלקים מחלקים אותה בהתאם ומשתמשים באדיטיביות).
באופן עקרוני ניתן להוכיח משפט זה גם עבור מסילות שאינן חלקות אלא רק בעלות אורך, אך זה הרבה יותר מסובך.

הגדרה - שדה משמר

פונק' וקטורית f שעבורה יש פונק' קדומה $F : D \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, כך ש$\overrightarrow{\nabla F} =$ $\overrightarrow{f}$ נקראת <u>שדה וקטורי משמר</u> בD או <u>שדה פוטנציאל</u> בD.
לפונק' F הנ"ל קוראים הפוטנציאל של f בD.

דוגמה

לפונק' הקבועה:

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)=\overrightarrow{c}=\left(c_1,\,...,\,c_n\right)$$

יש פוטנציאל:

$$F\left(\overrightarrow{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

הערה

אם $\overrightarrow{f}$ שדה משמר אז לכל 2 מסילות חלקות למקוטעין $\gamma_1,\,\gamma_2$ בתחום D שמתחילות ומסתיימות באותה נק', מתקיים:

$$\int_{\gamma_1}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}=\int_{\gamma_2}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}$$

גם אם $\gamma_1,\,\gamma_2$ לא שקולות.

המשמעות הפיזיקלית של אי-תלות במסילה

אם כאשר מעבירים חלקיק מנק' A לנק' B פועל על החלקיק כח שתלוי במיקומו, ראינו כבר שהעבודה נתונה ע"י אינטגרל מסילתי מסוג 2.
אם השדה הוא משמר, אז העבודה אינה תלויה במסילה שנבחר, אלא היא הפרש הפוטנציאלים.

משפט

תהי $f:\;D\to\mathbb{R}^n$ פונק' וקטורית, המוגדרת ורציפה ב-$D\subseteq\mathbb{R}^n$. אם האינטגרלים המסילתיים של f אינם תלויים במסילות (בעלות אורך), אלא רק בקצותיהן, אז f משמר.

הוכחה

תהי $\overrightarrow{x_0}\in D$ נק' מסויימת (קבועה) ב-D ותהי $\overrightarrow{x}\in D$ כלשהי (D פתוחה וקשירה בהיותה תחום).
כיוון שהאינטגרל $\int_\gamma f\left(\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{dx}$ תלוי ב-$\overrightarrow{x}$ בלבד (נק' הראשית כל הזמן $\overrightarrow{x_0}$, γ מסילה מ-$\overrightarrow{x_0}$ ל-$\overrightarrow{x}$) לכן כשנשנה את $\overrightarrow{x}$ נקבל:

$$F\left(\overrightarrow{x}\right)=\int_\gamma\overrightarrow{f}\overrightarrow{dx}$$

כאשר γ מסילה ב-$\overrightarrow{x_0}$ ל-$\overrightarrow{x}$.
נותר להראות כי F זו היא הפוטנציאל של $\overrightarrow{f}$, כלומר עלינו להראות שלכל $\overrightarrow{x}\in D$ ולכל $j=1,\,...,\,n$ מתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=f_j\left(\overrightarrow{x}\right)$$

נוכיח ב.ה.כ. עבור $j=1$.
ובכן, עלינו להוכיח:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F\left(x_1+h,\,x_2,\,...,\,x_n\right)-F\left(x_1,\,..,\,x_n\right)}{h}=f_1\left(x_1,\,...,\,x_n\right)$$

נגדיר :

$$\overrightarrow{h}=h\cdot e_1=\left(h,\,0,\,...,\,0\right)$$

אזי:

$$F\left(x_1+h,\,x_2,\,...,\,x_n\right)-F\left(x_1,\,..,\,x_n\right)=F\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{h}\right)-F\left(\overrightarrow{x}\right)$$

אם $|h|$ קטן דיו, אזי הקטע המחבר בין $\overrightarrow{x}$ ל$\overrightarrow{x+h}$ נמצא כולו בD (כי $\overrightarrow{x}\in D$).
נכתוב קטע זה כתמונה של מסילה:

$$\gamma^1\left(t\right)=\left(x_1+th,\,x_2,\,..,\,x_n\right),\,t\in\left[0,\,1\right]$$

ואז γ_1 בוודאי בעלת אורך, שמתחילה ב$\overrightarrow{x}$ ומסתיימת ב$\overrightarrow{x+h}$ לכן:

$$F\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{h}\right)=\int_{\gamma+\gamma_1}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}$$

$\gamma+\gamma_1$ היא מסילה בD שמתחילה בx_0 ומסתיימת ב$\overrightarrow{x+h}$ ותלויה בx.
כעת:

$$\begin{aligned}
F\left(\overrightarrow{x+h}\right)-F\left(\overrightarrow{x}\right) &= \int_{\gamma+\gamma_1}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}-\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}\\
&= \int_{\gamma_1}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}\\
&= \int_0^1 f\left(\gamma_1\left(t\right)\right)\cdot\gamma_1^{'}\left(t\right)dt\\
\gamma_1^{'}\left(t\right) &= \overrightarrow{h}\\
F\left(\overrightarrow{x+h}\right)-F\left(\overrightarrow{x}\right) &= h\cdot\int_0^1 f_1\left(\gamma_1\left(t\right)\right)dt\\
&= h\cdot f_1\left(\gamma_1\left(\theta\right)\right)
\end{aligned}$$

המעבר האחרון הוא לפי משפט הערך הממוצע האינטגרל, $0\le\theta\le 1$.
מכאן:

$$\begin{aligned}
\frac{F\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{h}\right)-F\left(\overrightarrow{x}\right)}{h} &= f_1\left(\gamma_1\left(\theta\right)\right)\\
&= f_1\left(x_1+\theta h,\,x_2,\,...,\,x_n\right)
\end{aligned}$$

וכאשר $h\to 0$ אז $\theta h\to 0$ ולפי רציפות f נובע:

$$\lim_{h\to 0}f_1\left(x_1+\theta h,\,x_2,\,..,\,x_n\right)=f_1\left(x_1,\,..,\,x_n\right)=f_1\left(\overrightarrow{x}\right)$$

ולכן קיבלנו שאכן F הקדומה של f כי מתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=f_1$$

תרגיל 1

תהי $f:\ D\to\mathbb{R}^{n}$ פונק' רציפה בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$. האינטגרל של f אינו תלוי במסילה $\Longleftrightarrow$ לכל מסילה סגורה γ בעלת אורך בD, מתקיים $\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dx}$.

תרגיל 2

אם $\overrightarrow{f}$ פונק' וקטורית גזירה ברציפות ב$D\subseteq\mathbb{R}^{n}$, ו$\overrightarrow{f}$ היא שדה משמר, אז לכל $1\leq i,\,j\leq n$ ולכל $\overrightarrow{x}\in D$ מתקיים:

$$\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{\partial f_{j}}{\partial x_{i}}\left(\overrightarrow{x}\right)$$

(תנאי הכרחי אך לא מספיק).

הכנות למשפט גרין

תחום סגור ב$\mathbb{R}^{2}$ נקרא נורמלי ביחס לציר הx (קב' סגורה וחסומה) (=ניתן להטלה על ציר x) אם יש פונק' $\varphi_{1},\,\varphi_{2}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$כך שמתקיים:

$$D=\left\{ (x,\,y)\ |\ a\leq x\leq b,\,\varphi_{1}\left(x\right)\leq y\leq\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$$

באופן דומה, D הוא נורמלי ביחס לציר y (ניתן להטלה על ציר y) אם יש $\psi_{1},\,\psi_{2}$ כך שמתקיים:

$$D=\left\{ (x,\,y)\ |\ c\leq y\leq d,\,\psi_{1}\left(y\right)\leq x\leq\psi_{2}\left(y\right)\right\}$$

נאמר כי D הוא תחום "נוח" אם הוא איחוד של מספר סופי של תחומים שניתנים להטלה על ציר x וגם על ציר y ושפתו היא איחוד של מס' סופי של עקומות לא נחתכות (בזוגות). אנו מכוונים את קווי השפה כך שהמתקדם בכיוון החיובי רואה את התחום משמאלו (נגד כיוון השעון).
כל תחום הניתן להטלה במישור הוא בעל שטח, לכן ניתן להגדיר עליו אינט' כפול עבור כל פונק' רציפה המוגדרת בתוכו.
בנוסף, לכל פונק' וקטורית רציפה ניתן להגדיר אינט' מסילתי על קווי השפה.

משפט גרין כללי (על תחום נוח)

יהי D תחום נוח ותהי $f=\left(f_{1},\,f_{2}\right)$ רציפה בD אז:

$$\int_{\partial D}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr}=\iint_{D}\left(\frac{\partial f_{2}}{\partial x}-\frac{\partial f_{1}}{\partial y}\right)dxdy$$

הוכחה

נפרק את D לתחומים חלקיים D_{j} כך שכל D_{j} ניתן להטלה על שני הצירים.
על פי הגדרת הכיוון, חלקי השפה שמשותפים לשני תת תחומים מכוונים בכיוונים מנוגדים באינטגרלים המסילתיים $\int_{D_{j}}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr}$ לשני תחומים אלה ולכן מבטלים זה את זה בסכום:

$$A=\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{j}}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr}$$

לכן, A הוא בעצם סכום של אינטגרליים מסילתיים על חלקי השפה של הD_jים ששייכים רק לאחד הD_jים, ואלה הם בדיוק חלקי השפה שאיחודם הוא ∂D ולכן:

$$A=\int_{\partial D}\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dr}$$

מצד שני, החלק של האינטגרל הכפול במשפט גרין הוא, לפי תכונות האינטגרל הכפול:

$$\sum_{j=1}^{n}\iint_{D}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$$

לכן מספיק להוכיח את נוסחת גרין עבור תחום D, הניתן להטלה על שני הצירים.

משפט גרין עבור תחום הניתן להטלה על שני הצירים (וללא חורים)

יהיו $P,\,Q$ פונק' רציפות על תחום D הניתן להטלה על שני הצירים וללא חורים, ומתקיים שגם $\frac{\partial Q}{\partial x},\,\frac{\partial P}{\partial y}$ רציפות, אזי:

$$\int_{\partial D}P\left(x,\,y\right)dx+Q\left(x,\,y\right)dy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

הוכחה

נתחים מתחום הניתן להטלה על ציר x:

$$D=\left\{\left(x,\,y\right)\ \mid a\leq x\leq b,\,y_1\left(x\right)\leq y\leq y_2\left(x\right)\right\}$$

נסמן את הקטעים של D:

$$\begin{aligned}AB&=\overrightarrow{y_2\left(a\right)y_1\left(a\right)}\\BC&=\overrightarrow{y_1\left(a\right)y_1\left(b\right)}\\CE&=\overrightarrow{y_1\left(b\right)y_2\left(b\right)}\\EB&=\overrightarrow{y_2\left(b\right)y_2\left(a\right)}\end{aligned}$$

נתבונן בפונק' הרציפות $P\left(x,\,y\right)$ ו$\frac{\partial P}{\partial y}$ ונחשב תחילה את:

$$\begin{aligned}\iint_{D}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy&=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx\\&=\int_a^b P\left(x,\,y_2\left(x\right)\right)-P\left(x,\,y_1\left(x\right)\right)dx\\&=\int_a^b P\left(x,\,y_2\left(x\right)\right)dx-\int_a^b P\left(x,\,y_1\left(x\right)\right)dx\\&=-\int_{EB}P\left(x,\,y\right)dx-\int_{AC}P\left(x,\,y\right)dx-0-0\\&=-\int_{EB}P\left(x,\,y\right)dx-\int_{BA}P\left(x,\,y\right)dx-\int_{AC}P\left(x,\,y\right)dx-\int_{CE}P\left(x,\,y\right)dx\\&=-\int_{\partial D}P\left(x,\,y\right)dx\end{aligned}$$

באופן אנלוגי אם D ניתן להטלה על ציר y נקבל:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} Qdy$$

ובסה"כ נקבל על ידי חיסור השוויונים נקבל:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

וזה בדיוק משפט גרין.

דוגמה

חשב את האינטגרל:

$$I = \int_L \left(e^x \sin y - y + 1\right) dx + \left(e^x \cos y - 1\right) dy$$

כאשר L הוא חצי מעגל

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

מהנק' $(2, 0)$ לנק' $(0, 0)$.

פתרון

מצד אחד, חישוב ישיר ע"י פרמטריזציה הוא מסובך מאוד.
מצד שני, כדי להשתמש בגרין, מכיוון שהקו L אינו סגור, צריך לסגור אותו.
נוסיף את הקו L_1 שהוא הקו הישר מ$(0, 0)$ ל$(2, 0)$. כעת, $L \cup L_1$ סגור.
ברור ש$\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, P, Q רציפות בD.
לפי גרין:

$$\oint_{L \cup L_1} Pdx + Qdy = \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2}$$

ע"י פרמטריזציה של L_1 נקבל:

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = 2$$

ומכאן:

$$\int_L Pdx + Qdy = \frac{\pi}{2} - 2$$