תרגול 11

1. הגדרה : מרחב האוסדורף X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת קבוצה קומפקטית A כך ש$x \in int(A)$.

2. תרגיל (קומפקטיפיקציית הנקודה) : יהא X מרחב T_2 שאינו קומפקטי. נגדיר $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר ∞ איבר שלא ב X. נגדיר טופלוגיה τ על $\hat{X}$ ע״י שנגדיר את הקבוצות הסגורות בו : הקבוצות הסגורות ב $\hat{X}$הן תתי הקבוצות הקומפקטיות של X והקבוצות מהצורה $S \cup \{\infty\}$ עבור S סגורה ב X.

   (א) הוכיחו כי אכן τ טופולוגיה (היעזרו בעובדה כי כל קבוצה סגורה F ב $\hat{X}$ מקיימת כי $F \setminus \{\infty\}$ קבוצה סגורה ב X).

   פתרון :

   - $\emptyset \in \tau$ כי היא קומפקטית ב X, $\hat{X} \in \tau$ כי $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ו X סגורה ב X.
   - חיתוך כל שהוא של סגורות $\{F_i\}$: אם קיים i כך ש $F_i \subseteq X$ אזי $\cap F_i = \cap (F_i \setminus \{\infty\})$ וזה חיתוך של סגורות ב X ולכן סגורה ב X. בנוסף, החיתוך מוכל ב F_i שקומפקטית ב X ולכן החיתוך גם הוא קומפקטי ב X ולכן סגור. אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i = S_i \cup \{\infty\}$ עבור S_i סגורה ב X ולכן $\cap F_i = (\cap S_i) \cup \{\infty\}$ שזה איחוד של קבוצה סגורה ב X (היינו $\cap S_i$ כחיתוך של סגורות) עם $\{\infty\}$ ולכן סגור.
   - איחוד של סגורות F_1, F_2 : אם $F_1, F_2 \subseteq X$ אזי הם קומפקטים ואיחוד סופי של קומפקטים הוא קומפקטי. אחרת $F_1 \cup F_2 = (F_1 \setminus \{\infty\}) \cup (F_2 \setminus \{\infty\}) \cup \{\infty\}$ שאלו איחוד סופי של סגורות ב X (ולכן סגורה ב X) איחוד עם $\{\infty\}$ ולכן סגור ב $\hat{X}$.

   (ב) הוכיחו כי X הוא תת מרחב של $\hat{X}$.

   פתרון :

   נראה שהסגורות של X הם מהצורה חיתוך של X עם סגורה של $\hat{X}$.

   מצד אחד, תהי S קבוצה סגורה בX. נסתכל על $F = S \cup \{\infty\}$. לפי הגדרה, F סגורה ב$\hat{X}$, ו$F \cap X = S$.

   מצד שני, תהי F סגורה ב$\hat{X}$ אז יש 2 אפשרויות. אם F קומפקטית בX, אז מכיוון שX האוסדורף זה אומר שF סגורה בX. וכמובן ש$F \cap X = F$. אם F מהצורה של $S \cup \{\infty\}$, כאשר S סגורה אז $S = F \cap X$ שסגורה בX.

   (ג) הוכיחו כי $\hat{X}$ הוא קומפקטי.

   פתרון :

   יהיו $\{F_i\}$ סגורות כך ש $\cap F_i$ריק. אם קיים i כך ש $F_i \subseteq X$ קומפקטי אזי $\{F_j \cap F_i\}_j$ אוסף של קבוצות סגורות ב F_i שהחיתוך שלהם ריק ולכן יש חיתוך סופי $\bigcap (F_{j_k} \cap F_i)$ שהוא ריק וזהו גם חיתוך סופי ומהקבוצות $\{F_i\}$.

אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i = S_i \cup \{\infty\}$ ואז החיתוך שלהם מכיל לפחות את $\{\infty\}$ ולא ריק.

(ד) הוכיחו כי X צפופה ב $\hat{X}$.

פתרון:

מתקיים כי $cl(X) \in \left\{X, \hat{X}\right\}$ כי אלו שני הקבוצות היחידות המכילות את X. נניח בשלילה כי $cl(X) = X$ אזי X סגורה. אבל X אינו קומפקטי וגם לא מהצורה $S \cup \{\infty\}$.

(ה) הוכיחו כי X קומפקטי מקומי אמ"מ $\hat{X}$ הוא T_2

פתרון:

$(\Rightarrow)$ נתון $\hat{X}$ הוא T_2. צ"ל X קומפקטי מקומי, לצורך כך יהא $x \in X$. קיימות סביבות פתוחות זרות כך ש $U \ni \infty, V \ni x$. לכן $x \in V \subseteq U^c$. U^c סגורה ב $\hat{X}$ ו $\infty \notin U^c$ ולכן היא קומפקטית ב X. כלומר, יש קבוצה קומפקטית שx נמצא בפנים שלה.

$(\Leftarrow)$ נתון X קומפקטי מקומית. צ"ל $\hat{X}$ הוא T_2. יהיו $x_1 \neq x_2$. אם שניהם ב X אזי אפשר להפריד אותך עם קבוצות זרות פתוחות ב X והם יהיו גם פתוחות ב $\hat{X}$. אחרת, בה"כ $x_2 = \infty$. אז $x_1 \in X$. מכיוון ש X קומפקטי מקומית, יש קבוצה קומפטית K וקבוצה פתוחה בX, U כך ש$x \in U \subseteq K$. לפי הגדרת הטופולוגיה, U פתוח גם ב$\hat{X}$, וK^c פתוח. אז U וK^c הן הסביבות המפרידות.

3. שאלת המשך:

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי קומפקטיפיקציית הנקודה $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

פתרון:

נראה של 0 אין סביבה קומפקטית. נניח בשלילה שיש סביבה קומפקטית $0 \in K$ אזי קיימת קבוצה פתוחה בסיסית $B(0,\epsilon)$ עבור ϵ לא רציונלי, כך ש $0 \in B[0,\epsilon] \cap \mathbb{Q} \subseteq K$, מה שאומר ש $B[0,\epsilon] \cap \mathbb{Q}$ קומפקטי כי הוא סגור בתוך קומפקטי. מכיוון שϵ לא רציונלי, $[-\epsilon,\epsilon] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_n \left((-\epsilon + \frac{1}{n}, \epsilon - \dfrac{1}{n}) \cap \mathbb{Q} \right)$. זהו כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי. סתירה.

(ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.

פתרון:

תהא $S \subseteq \hat{\mathbb{Q}}$ קבוצה

$(\Rightarrow)$ נניח S קומפקטית ב $\hat{\mathbb{Q}}$. אם $S \subseteq \mathbb{Q}$ אזי היא קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ ולכן סגורה ב $\hat{\mathbb{Q}}$(מהגדרה).
אם $\infty \in S$ אזי $S = S' \cup \{\infty\}$ עבור $S' \subseteq \mathbb{Q}$. נותר להראות כי S' סגורה ב $\mathbb{Q}$. נניח בשלילה שלא אזי קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq S'$ אבל $x_n \to x \notin S'$. ראינו כי $K = \{x_n\}_n \cup \{x\} \subseteq \mathbb{Q}$ קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ (סדרה+ גבול היא קבוצה קומפקטית). כמו כן, סדרה מתכנסת ב$\mathbb{Q}$ שמורידים ממנה את הגבול היא דיסקרטית. לכן נגדיר כיסוי של S ע"י $K^c \cap S$ (פתוחה בS מהגדרת טופולוגיית תת מרחב), והנקודונים בסדרה. לכיסוי זה אין תת כיסוי סופי. סתירה.

$(\Leftarrow)$ נתון S סגורה. אם $S \subseteq \mathbb{Q}$ אז מהגדרת הטופולוגיה על $\hat{\mathbb{Q}}$, S קומפקטית. אם $S = S' \cup \{\infty\}$ עבור S' סגורה ב $\mathbb{Q}$: יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של S. אחת הקבוצות מכילה את ∞. נניח $O_j \ni \infty$. אז מהגדרת הטופולוגיה O_j^c קומפקטית ב$\mathbb{Q}$. S' סגורה ב$\mathbb{Q}$, לכן $S' \cap O_j^c$ קומפקטית, כתת קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי.

האוסף $\{O_i\}$ הוא כיסוי פתוח גם של $S'\cap O_j^c$ ולכן קיים לו תת כיסוי סופי. תת הכיסוי הסופי, ביחד עם O_j, מהווה תת כיסוי סופי של S. לכן S קומפקטית.

4. תרגיל: מצאו דוגמה למ"ט X שאינו האוסדורף בו כל גבול הוא יחיד.
פתרון: ניקח את $\mathbb{R}$ עם הטופלוגיה הקו-מנייתית ($\{O \mid |O^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$) ונראה שזה מ"ט המקיים את הדרישות שבשאלה.
אינו האוסדורף: כל שני נקודות לא ניתנות להפרדה מכיוון שכל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות מקיימות שהחיתוך שלהם לא ריק. הוכחה: יהיו קבוצות פתוחות O_1, O_2 לא ריקות ונניח בשלילה $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. אזי

$$\mathbb{R} = \emptyset^c = (O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c$$

וקיבלנו סתירה כי O_1^c, O_2^c בנות מניה ולכן גם האיחוד שלהם אבל $\mathbb{R}$ אינו בן מנייה.
כל גבול יחיד: נראה כי רק הסדרות הקבועות לבסוף מתכנסות והגבול שלהם יחיד. תהא x_n סדרה שמתכנסת ל x אזי $O = (\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})^c \cup \{x\}$ פתוחה (המשלים מוכל ב $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$שהוא בן מנייה) ו $x \in O$. לכן, לפי הגדרת התכנסות, קיים n_0 שהחל ממנו $x_n \in O$ אבל לפי הגדרת O נקבל כי $x_n = x$ החל ממקום זה. זה גם מוכיח שהגבול יחיד.

5. הגדרה: יהי X מ"ט ו $x \in X$. יהי $\{O_i\}$ אוסף של קבוצות סביבות של X. נאמר ש$\{O_i\}$ הוא בסיס מקומי של x, אם כל סביבה U של x מכילה איזשהו O_i.

6. הגדרה: נאמר ש(X, τ) הוא בעל תכונת מניה ראשונה, או B_1, אם לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מניה.

7. תרגיל: הוכיחו שאם X מ"ט שבו כל גבול יחיד ובנוסף הוא B_1 אזי X הוא האוסדורף.
הוכחה: יהיו $x_1 \neq x_2$ נקודות במרחב. יהיו $\left\{O_n^1 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ אוסף בן מנייה של סביבות פתוחות של x_1 כך שכל סביבה פתוחה O של x_1 מכילה אחת מ O_n^1 (זהו בסיס מקומי שקיים לפי תכונת B_1). באופן דומה $\left\{O_n^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ עבור x_2. נגדיר $U_n^1 = \cap_{i=1}^n O_i^1$ ובאופן דומה $U_n^2 = \cap_{i=1}^n O_i^2$. כיוון שאלו חיתוכים סופיים, לכל n U_n^1, U_n^2 פתוחות ו $x_1 \in U_n^1, x_2 \in U_n^2$. טענה: קיימות U_n^1, U_n^2 זרות עם אותו אינדקס (ואלו יהיו הקבוצות שמפרידות את x_1, x_2). הוכחה: אחרת לכל n קיים $x_n \in U_n^1 \cap U_n^2$. נראה כי $x_{m,n} \to x_1$ וגם $x_{m,n} \to x_2$ ונקבל סתירה לכך שכל גבול הוא יחיד. נראה כי $x_n \to x_1$ וההוכחה ש $x_n \to x_2$ דומה. יהא $x \in O$ אזי קיים n_0 כך ש $O_{n_0}^1 \subseteq O$ ומכיוון ש $U_{n_0}^1 \subseteq O_{n_0}^1$ (לפי הגדרת $U_{n_0}^1$) ולכל $n \geq n_0$ מתקיים כי $U_n^1 \subseteq U_{n_0}^1$(שוב, לפי הגדרת הקבוצות, $\left\{U_n^1 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ היא שרשרת יורדת של קבוצות) נקבל כי לכל $n \geq n_0$ מתקיים כי $x_n \in U_n^1 \subseteq O$.

8. תרגיל: הוכיחו כי כל פונקציה רציפה והפיכה מ$\mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \to$ היא הומיאומורפיזם.
הוכחה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. נראה שהיא פתוחה ואז סיימנו. לשם כך מספיק שניקח קטע פתוח (a, b) (כאשר $a < b$) ונראה כי $f[(a, b)]$ פתוח. הקטע הסגור $[a, b]$ הוא קומפקטי וקשיר ולכן גם $f[[a, b]]$ גם קומפקטי וקשיר (תמונה של קבוצה קומפקטית/קשירה תחת פונקציה רציפה היא קומקפטית/קשירה) ולכן $f[[a, b]] = [c, d]$ עבור $c < d$ כלשהם. (מכיוון שתת הקבוצות הקשירות של $\mathbb{R}$ הן קטעים. והקטעים הקומפקטיים היחידים הם הקטעים הסופיים הסגורים. כי תת קבוצה קומפקטית של $\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה. כעת מכיוון שתמונה של קשיר היא קשירה, וכאשר נוריד מקטע סגור את נקודות הקצה שלו נקבל קבוצה קשירה, התמונה של (a, b) קשירה. הנקודות היחידות בקטע סגור שאפשר להוריד ולהישאר עם קבוצה קשירה הן (c, d). לכן $f(a, b) = (c, d)$.