# פתרון תרגיל 8

## שאלה 1

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+y+z=t \\ tx+(2t-2)y+(t^2+t)z=t^2 \\ -6x-2y-2ty-t^2z-5tz=-5t-3 \end{cases}$$

א. כאשר t הוא מספר ממשי. עבור אילו ערכים של t יש למערכת:

- פתרון יחד
- אין פתרון
- אינסוף פתרונות.

ב. היעזר בסעיף הקודם וקבע עבור אילו ערכי t הוקטורים הבאים מהווים בסיס עבור $R^3$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t\\2t-2\\t^2+t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\-2-2t\\-t^2-5t\end{pmatrix}$$

**פתרון:**

א. נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ t & 2t-2 & t^2+t & t^2 \\ -6 & -2-2t & -t^2-5t & -5t-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-tR_1]{R_3\leftarrow R_3+6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 4-2t & -t^2-5t-6 & t-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-5t-6 & t-3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)(t-3) & t-3 \end{array}\right)$$

אין פתרון: כשאר t=2 נקבל ששורה 3 תיהיה שורת סתירה

אינסוף פתרונות: כאשר t=3 נקבל שורת אפסים (שורה 3)

פתרון יחיד: $t \neq 2,3$.

ב. וקטורים אלו הם בעצם המערכת ההומוגנית של הסעיף הקודם. ולכן אף שורה במטריצה ההומוגנית לא תתאפס כאשר $t \neq 2,3$. ובמקרה זה הוקטורים יהיו בת"ל. ב-$R^3$, במימד הוא 3. ולכן קיבלנו קבוצה בת"ל בגודל 3 ולכן מהווה בסיס עבור $R^3$.

## שאלה 2

לגבי כל אחת מהבאים- נתון כי זהו מרחב וקטורי. מצאו בסיס ומימד.

1.

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid z=2y,\ y=x\right\}.$$

נסמן: x=t, y=t, z=2t. ולכן נקבל: $V_1=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$. <= הבסיס הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$. והמימד=1.

.2
$$V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid y=x-z\right\}.$$

נסמן: x=t, z=s, y=t-s. ולכן נקבל: $V_2=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$. <= הבסיס הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן המימד=2.

.3
$$V_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\Re^4 \mid y=x-z,\ w=2y+z\right\}$$

נסמן: x=t, z=s, y=t-s, w=2t-s ולכן נקבל: $V_3=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$. <= הבסיס הוא:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן המימד=2.

.4
$$W=span\{(1,-7,-5,1),(1,-5,-4,2),(1,1,-1,5),(2,-4,-5,7)\}$$

נכניס למטריצה ונמצא איזה וקטורים הם בת"ל והם יהיו הבסיס של W.

$$\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\1&-5&-4&2\\1&1&-1&5\\2&-4&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-2R_1]{\substack{R_2\leftarrow R_2-R_1\\R_3\leftarrow R_3-R_1}}\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\0&2&1&1\\0&8&4&4\\0&10&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-5R]{R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הבסיס הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-5\\-4\\2\end{pmatrix}\right\}$. ולכן המימד הוא 2.

5. $W=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c+2d\ ,\ b+a=c+d\}$

נסמן:

C=s

D=t

a=s+2t

b=c+d-a => b=s+t-s-2t => b=-t

ולכן:

$W=\left\{t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$. ולכן הבסיס הוא: $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ולכן המימד הוא 2.

## <u>שאלה 3</u>

האם הקבוצה $\{2+x,1+x^2,x^2+x^3,x^2-x^3\}$ מהווה בסיס ל- $\Re_3[x]$?

**<u>פתרון</u>**

נסדר קבוצה זו במטריצה

$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2R_2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_3}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

הקבוצה בת"ל והמימד שלה הוא 4 וכן גם המימד של $\Re_3[x]$ הוא 4 ולכן מהווה בסיס עבור $\Re_3[x]$

## שאלה 4

מצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+z-w=0 \end{cases}$$

**פתרון**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחר: $w=t, z=s$ .

נקבל: $y=-0.5s-1.5t$

$x=-0.5s+0.5t$

מכאן מרחב הפתרונות הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t,s \in \mathbb{R} \right\}$

ולכן בסיס מרחב הפתרונות הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ והמימד שווה 2.

## שאלה 5

תהי $S=\{ax^2+2, x^2+ax-2, x+1\}$ .

. הוכיחו כי לכל $a \in R$, S בסיס ל- $R_2[x]$ .

**פתרון**

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1+a & -a/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\ 0 & a & 1\\ 0 & 1 & -a/2-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-aR_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1+\frac{a^2}{2}+a\\ 0 & 1 & -a/2-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\ 0 & 1 & -a/2-1\\ 0 & 0 & 1+\frac{a^2}{2}+a\end{pmatrix}$$

$1+\frac{a^2}{2}+a$ תמיד חיובי ולכן הוקטורים תמיד בת"ל. המימד של המרחה שהם פורשים הוא 3 ששווה למימד של $\Re_2[x]$ ולכן מהוות בסיס ל $\Re_2[x]$.