לינארית 2 - תרגול 10

(שכחתי שיעור שעבר... להזכיר להם מתי מטריצה לכסינה
לעשות סדר בראש עם התנאים עבור פ"מ ועבור פא"ה. יש כמה שמתבלבלים..)

להזכיר על מכפלה פנימית
על מ"פ סטנדרטית מעל $\mathbb{R}$
על מ"פ סטנדרטית מעל $\mathbb{C}$
ובקצרה לחזור על הנורמה...

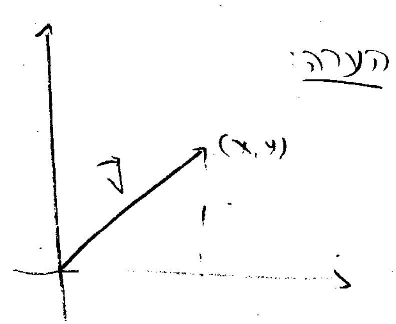
הגדרה: יהי V ממ"פ.
הנורמה של V היא פונק' $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$
כך שמתקיים:
1. $\|v\| \geq 0$ לכל $v \in V$
$\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
3. אי-שיוויון המשולש - $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

הנורמה המושרית מהמ"פ: $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$

ננית ב-$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית
$$\|(x,y)\| = \sqrt{\langle (x,y),(x,y) \rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ב-$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנ' הנורמה היא בעצם ערך המרחק שאנו מכירים.

הערה:

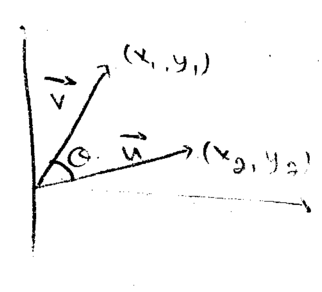


$$|(x,y)| = |v| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{|u|\,|v|}$$

$$= \frac{uv}{|u||v|}$$

ע"פ הגדרה [illegible]



(2)

בס"ד

דוג. ב- $\mathbb{R}^3$ נתון $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,1,2)$

נמצא את הזווית שביניהם:

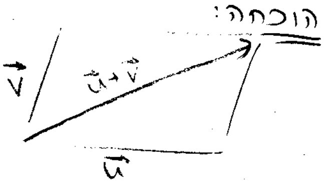
$$\cos\alpha = \frac{2+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot 3} \Rightarrow \alpha = 35.264$$

(סכום ריבועי הצלעות = סכום ריבועי האלכסונים)

תרגיל: הוכח את כלל המקבילית מעל $\mathbb{R}$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$$

הוכחה:



$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

$$\overset{\text{לינאריות במשתנה ראשון}}{=} \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle + \langle u, u-v\rangle - \langle v, u-v\rangle$$

כי מעל $\mathbb{R}$ יש גם לינאריות במשתנה שני

$$= \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\|v\|^2} + \langle u,u\rangle - \cancel{\langle u,v\rangle} - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

משל [redacted]

$$\cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \quad \text{ב-}\ \mathbb{R}^n \qquad (*)$$

ההגדרה הזו נכונה ב-$\mathbb{R}^n$ אבל ניתן להוכיח שההגדרה נכונה בכל מ"פ (ההוכחה בהרצאה)

$$\boxed{v \underset{\text{מאונך}}{\perp} w \iff \langle v,w\rangle = 0}$$

שני וקטורים שמאונכים $v \perp w$ נקראים "אורתוגונליים"

(מרחב V מ"פ אם אפשר לומר)

הגדרה: $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ נקראת "אורתוגונלית" אם לכל $1\le i\ne j\le n$ מתקיים $\langle v_i, v_j\rangle = 0$

דוג: $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ היא קב' אורתוגונלית ב- $\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הסטנדרטית

כי:

$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0\cdot1 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \dots = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 1-1+0 = 0$$

7 וקטור "מנורמל" הוא וקטור באורך 1 (כלומר $\|v\|=1$)

נרמול וקטור:

אם יש וקטור v לא מנורמל ורוצים לנרמל אותו אז $\frac{v}{\|v\|}$ ← מנורמל.

דוגמא: $\binom{2}{7}\in\mathbb{R}^2$ הוא לא מנורמל כי $\left\|\binom{2}{7}\right\|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}\neq 1$

ננרמל אותו: $\frac{\binom{2}{7}}{\sqrt{53}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{53}}\\ \frac{7}{\sqrt{53}}\end{pmatrix}$

הגדרה: קבוצה אורתונורמלית היא קב' אורתוגונלית שכל הוקטורים בה הם באורך 1.

דוג: (1) $\left\{\binom{1}{0},\binom{i}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{i}\right\}$ זו דוג' לוקטורים מנורמלים שהם לא קב' אורתונורמלית (אונ')

כי הם לא מאונכים...

למשל $\left\langle\binom{1}{0},\binom{i}{0}\right\rangle=1\cdot\bar{i}+0\cdot 0=-i$

(2) $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\right\}$ ← בסיס אונ' ל-$\mathbb{R}^2$

(3) $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ ← קבוצה אונ' ב-$\mathbb{R}^3$

(4) $\left\{\binom{1}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{0}\right\}$ ← היא קב' אורתוגונלית ולא אונ'! (כי וקטור ה-0 נמצא שם ואורכו לא 1)

תרגיל: תהא S קב' אורתוגונלית כך ש- $0\notin S$

צ"ל S בת"ל

הוכחה: ←

הוכחה: נניח בשלילה $\underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{\underset{\parallel}{Z}}$ לא בת"ל

ונניח בה"כ v_n תלוי באחרים. כלומר $v_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i$

(לפחות אחד מה- $\alpha_i\neq 0$ כי אחרת $v_n=0$ אבל נתון $0\notin Z$)

נניח $\alpha_j\neq 0$.

$$\langle v_n,v_j\rangle=\Big\langle \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i\,,\,v_j\Big\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_j\rangle$$

$$=\alpha_1\underbrace{\langle v_1,v_j\rangle}_{=0}+\dots+\alpha_j\langle v_j,v_j\rangle+\dots+\alpha_{n-1}\underbrace{\langle v_{n-1},v_j\rangle}_{=0}$$

כי נתון Z אורתוגונלית

$$=\underbrace{\alpha_j}_{\neq 0}\underbrace{\langle v_j,v_j\rangle}_{\neq 0}\neq 0$$

$\Leftarrow$ קיבלנו $\langle v_n,v_j\rangle\neq 0$ סתירה! הנתון Z אורתוגונלית

מש"ל

> **הגדרה:** "בסיס אורתונורמלי" הוא בסיס שהוא גם הקבוצה אורתונורמלית

מה זה טוב בסיס כזה?

נניח $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס א"ן (אורתונורמלי) של V

ויהי $v\in V$ אז אפשר להציג $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i$ (כי B בסיס)

אז מתקיים

$$\forall j\qquad \langle v,w_j\rangle=\Big\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i\,,\,w_j\Big\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle w_i,w_j\rangle$$

$$=\alpha_1\underbrace{\langle w_1,w_j\rangle}_{=0}+\dots+\alpha_j\underbrace{\langle w_j,w_j\rangle}_{=\|w_j\|^2=1}+\dots+\alpha_n\underbrace{\langle w_n,w_j\rangle}_{=0}$$

כי מאונכים שהרי B א"ן.

כי B א"ן

$$=\alpha_j$$

מסקנה ← עמ' הבא

מסקנה! קיבלנו שלכל $1 \le j \le n$ $\langle v, w_j \rangle = \alpha_j$ (כאשר $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$)

ולכן בעצם

$$v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_n \rangle w_n$$

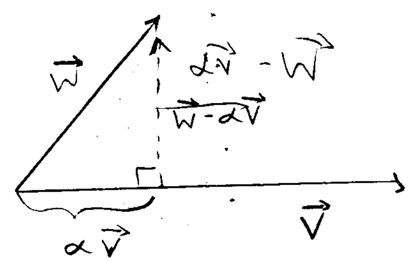
כן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \langle v, w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_n \rangle \end{pmatrix}$$

אז בהינתן סתם בסיס איך מוצאים בסיס אונ'?

תהליך גראם שמידט

$\underbrace{\{\vec v, \vec w\}}_{\text{אינם מאונכים}}$, $\{v, \underbrace{\vec w - \alpha \vec v}_{\text{קב' אורתוג' (כי מאונכים)}}\}$



וניתן לראות ששניהם פורשים את אותו מרחב!

$\alpha = ?$ נמצא אותה:

$$\langle w - \alpha v, v \rangle = 0$$

$$\langle w, v \rangle - \alpha \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle w, v \rangle = \alpha \langle v, v \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle w, v \rangle}{\|v\|^2}}$$

כעת, נכליל ונביא אלג' שבהינתן בסיס למרחב V מוצא ל-V

אלג' גראם שמידט

בסיס אונ'!!

אלגוריתם: נתון בסיס כלשהו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ (של V)

שלב א'! (אורתוגונליזציה)

נבנה בסיס אורתוגונלי $B_0=\{w_1,\dots,w_n\}$ ע״י

$$w_1=v_1$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot\vec{w_1}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\vec{w_1}-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\vec{w_2}$$

$$\vdots$$

$$w_n=v_n-\frac{\langle v_n,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\vec{w_1}-\dots-\frac{\langle v_n,w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}\vec{w_{n-1}}$$

שלב ב'! (נרמול)

$$\tilde{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$$

כאשר $u_i=\dfrac{w_i}{\|w_i\|}$

דוגמה: נתון $B=\left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}},\overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\overset{v_3}{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}\right\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (כאשר בו המכפ' הסטנדרטית)

מצאו בסיס אורת' לפי תהליך גרם שמידט.

פתרון: **שלב א'!**

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

סה"כ קיבלנו
$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>שלב ב!</u> נרמול

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס אורתונורמלי שפורש <u>את אותו</u> מרחב של $\{v_1, v_2, v_3\}$

<u>הערה:</u> גם הבסיס הסטנדרטי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

הוא בסיס אוי"ן של $\mathbb{R}^3$

אז למה כל העבודה הזו?

(כדי להדגים את גראם שמידט)

כי זו הייתה דוג' ספציפית ל- $\mathbb{R}^3$ אבל זה נכון לכל מרחב

ז"א:

בהינתן בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ למרחב <u>כלשהו</u>

אז אם נפעיל את גראם שמידט נקבל בסיס <u>אוי"ן</u> <u>לאותו</u> מרחב