

אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 5

1. גזרו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin\left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right) \quad \text{א.}$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right) \frac{(36x^2 - 2x + 2)(3x^4 - 1) - (12x^3 - x^2 + 2x - 1)12x^3}{(3x^4 - 1)^2} \quad \text{פתרון:}$$

$$f(x) = (\sin(x^2 - 7) + \cos(2x + 5))^{10} \quad \text{ב.}$$

$$f'(x) = 10(\sin(x^2 - 7) + \cos(2x + 5))^9 (\cos(x^2 - 7)2x - \sin(2x + 5) \cdot 2) \quad \text{פתרון:}$$

$$f(x) = \ln\left(\ln\left(\frac{3x - 12}{x^2 + 1}\right)\right) \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{3x - 12}{x^2 + 1}\right)' = \frac{3(x^2 + 1) - (3x - 12)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 - 3x^2 + 24x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{פתרון:}$$

$$\left(\ln\left(\frac{3x - 12}{x^2 + 1}\right)\right)' = \frac{x^2 + 1}{3x - 12} \frac{3 - 3x^2 + 24x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{לכן:}$$

$$\left(\ln\left(\ln\left(\frac{3x - 12}{x^2 + 1}\right)\right)\right)' = \frac{1}{\ln\left(\frac{3x - 12}{x^2 + 1}\right)} \frac{x^2 + 1}{3x - 12} \frac{3 - 3x^2 + 24x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{לכן:}$$

$$f(x) = e^{x^3 \sin(x)} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = e^{x^3 \sin(x)} (3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)) \quad \text{פתרון:}$$

$$f(x) = \tan(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1}) \quad \text{ה.}$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1})} \left(5 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x - 1}}(2x - 2)\right)$$

$$f(x) = \sqrt[6]{7x^2 - 3} \quad \text{ו.}$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{1}{6} (7x^2 - 3)^{-\frac{5}{6}} 14x = \frac{1}{6\sqrt[6]{(7x^2 - 3)^5}} \quad \text{לכן } f(x) = (7x^2 - 3)^{\frac{1}{6}}$$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (x - 5)^{(2x + 4)} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{\ln((x-5)^{(2x+4)})} = e^{(2x+4)\ln(x-5)} \quad \text{פתרון:}$$

$$f'(x) = e^{(2x+4)\ln(x-5)} \left(2\ln(x-5) + \frac{2x+4}{x-5} \right) = (x-5)^{(2x+4)} \left(2\ln(x-5) + \frac{2x+4}{x-5} \right) \quad \text{לכן:}$$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = e^{\ln((\sin x)^{\cos x})} = e^{\cos x \ln(\sin x)} \quad \text{פתרון:}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \ln(\sin x)} \left(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} \right) = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \quad \text{לכן:}$$

$$f(x) = \sin(x^{\cos x}) \quad \text{ג.}$$

$$g(x) = x^{\cos x} = e^{\ln(x^{\cos x})} = e^{\cos x \ln x} \quad \text{פתרון: נסמן ונאז}$$

$$g'(x) = e^{\cos x \ln x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right)$$

$$f'(x) = \cos(x^{\cos x}) x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \quad \text{ולכן:}$$

3. מצאו את הנגזרות מסדר גבוה הבאות:

$$y = \tan(x) \quad \text{עבור} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{א.}$$

$$y'' = \frac{-1}{\cos^4 x} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad \text{לכן} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{פתרון:}$$

$$y = \frac{x^3 - 3}{x^2 + 2} \quad \text{עבור} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ב.}$$

$$y' = \frac{3x^2(x^2+2) - (x^3-3)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 6x^2 + 6x}{(x^2+2)^2} \quad \text{פתרון:}$$

$$y'' = \frac{(12x^3 - 8x^3 + 12x + 6)(x^2+2)^2 - (3x^4 - 2x^4 + 6x^2 + 6x)2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4} \quad \text{לכן:}$$

$$y = e^{e^x} \quad \text{עבור} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{ג.}$$

פתרון:

$$y' = e^{e^x} e^x$$

$$y'' = e^{e^x} e^x e^x + e^{e^x} e^x = e^{e^x} e^{2x} (e^x + 1) = e^{e^x + x} (e^x + 1)$$

$$y''' = e^{e^x + x} (e^x + 1)(e^x + 1) + e^{e^x + x} e^x = e^{e^x + x} ((e^x + 1)^2 + e^x)$$

$$y = 3e^{2x+5} + 16x + 4 \quad \text{עבור} \quad \frac{d^5 y}{dx^5} \quad \text{ד.}$$

פתרון:

$$y' = 6e^{2x+5} + 16$$

$$y'' = 12e^{2x+5}$$

$$y^{(3)} = 24e^{2x+5}$$

$$y^{(4)} = 48e^{2x+5}$$

$$y^{(5)} = 96e^{2x+5}$$

ה. עבור $y = 4 \sin(2x - 3) + 6 \cos(15 - x) + 2$ $\frac{d^{92}y}{dx^{92}}$

פתרון:

עבור $f(x) = 4 \sin(2x - 3)$, כיוון שרוצים את הנגזרת ה-92, זה כמו הנגזרת ה-0 (הפונקציה עצמה), כי זו כפולה של 4. לכן $f^{(92)} = 4 \cdot 2^{92} \sin(2x - 3) = 2^{94} \sin(2x - 3)$.
עבור $g(x) = 6 \cos(15 - x)$ נקבל באותו האופן $g^{(92)} = 6 \cdot (-1)^{92} \cos(15 - x) = 6 \cos(15 - x)$.
לכן סה"כ: $y^{(92)} = 2^{94} \sin(2x - 3) + 6 \cos(15 - x)$.

ו. עבור $y = \sin(x) \cos(x)$ [רמז: השתמשו בנוסחה של סינוס לזווית כפולה]

פתרון: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ לכן $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$. לכן כמו בתרגיל לעיל נקבל:

$$y^{(20)} = \frac{1}{2} \sin(2x) 2^{20} = 2^{19} \sin(2x)$$

4. פתרון:

לכן $f(x) = e^{nx}$ $f'(x) = n e^{nx}$, $f''(x) = n^2 e^{nx}$, וכו', כלומר $f^{(n)}(x) = n^n e^{nx}$. (פורמלית ניתן להוכיח נוסחה זו באינדוקציה)

5. פתרון:

לכן $g(x) = e^{f(x)}$ $g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$ לכן $g''(x) = e^{f(x)} f''(x) + e^{f(x)} (f'(x))^2$.
כלומר: $g''(x) = e^{f(x)} (f''(x) + (f'(x))^2)$.

6. היעזרו במשפט הפונקציה ההפכית כדי למצוא את $\frac{dx}{dy}$ עבור $y = 1 + \frac{1}{x^4}$.

פתרון:

לכן, $y = 1 + x^{-4}$, $\frac{dy}{dx} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

לכן: $\frac{dx}{dy} = \frac{-x^5}{4}$

כעת נבודד את x מהפונקציה המקורית: $y - 1 = \frac{1}{x^4}$ כלומר $x^4 = \frac{1}{y - 1}$ כלומר $x = \frac{1}{\sqrt[4]{y - 1}}$.
ונציב:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y - 1}}\right)^5}{4} = \frac{-1}{4 \sqrt[4]{(y - 1)^5}}$$